

Příklady otázek – Základy diferenciálního a integrálního počtu

Reálné otázky ze SZZ 2022–2026 (M1)

Jakub Klesá

Pokryté předměty: NMAI054 (Matematická analýza 1)

Obsah

1	Integrál	1
2	Posloupnosti	2
3	Geometrická řada	3
4	Nespojitost funkce	3
5	Integrály a primitivní funkce	4
6	Základy analýzy	5

Poznámka. Tento dokument obsahuje reálné otázky z minulých termínů SZZ (2022–2026) zařazené do okruhu M1. U otázek s obrázkem je grafika oříznutá z originálního PDF (viz odkaz na zdroj). Text, číselná data a tabulky jsou přepsané věrně. Zadání i oficiální náčrty řešení pocházejí ze sad zveřejněných na webu MFF UK:

<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>

Náčrty označené jako doplněné jsou vlastní, oficiální sada je k dané otázce neobsahuje.

1 Integrál

(Reálná otázka: léto 2022, č. 3 – Integrál (per partes))

Zadání.

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval.

1. Jaký je vztah mezi dvěma primitivními funkcemi k téže funkci na I ? Zdůvodněte.
2. Nechť $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ a F, G jsou k nim primitivní funkce (tj. $F' = f$ a $G' = g$). Napište vzorec pro primitivní funkci k fG , známe-li primitivní funkci k Fg .
3. Podle tohoto vzorce najděte primitivní funkci k $f(x) = x \sin(x)$.

Náčrt řešení.

1. Dvě primitivní funkce k téže funkci na intervalu I se liší o konstantu. Jsou-li F_1 a F_2 obě primitivní k f , pak $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$ na I , a funkce s nulovou derivací na intervalu je konstantní; tedy $F_1 - F_2 = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

2. Z pravidla pro derivaci součinu $(FG)' = fG + Fg$ integrací dostaneme $FG = \int fG + \int Fg$, odkud

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx.$$

Tj. primitivní funkce k fG je $F \cdot G$ minus primitivní funkce k Fg .

3. Pro $\int x \sin(x) dx$ volíme $F(x) = x$ (takže $f = 1$) a $G(x) = -\cos(x)$ (takže $g = \sin x$). Pak $fG = -\cos x$ a $Fg = x \sin x$. Dosazením do vzorce:

$$\int (-\cos x) dx = x \cdot (-\cos x) - \int x \sin(x) dx,$$

tj. $-\sin x = -x \cos x - \int x \sin x dx$, odkud

$$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C.$$

Ověření derivací: $(\sin x - x \cos x)' = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$.

(V PDF bez náčrtu řešení; náčrt doplněn k výkladu okruhu, výpočet ověřen.)

2 Posloupnosti

(Reálná otázka: podzim 2022, č. 3 – Posloupnosti (limita, omezenost))

Zadání.

Nechť $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ je posloupnost reálných čísel.

1. Definujte, co znamená, že (a_n) je *konvergentní* (má vlastní limitu).
2. Definujte, co znamená, že (a_n) je *neomezená*.
3. Dokažte, že když (a_n) je neomezená, pak není konvergentní.

Náčrt řešení.

1. Posloupnost (a_n) konverguje (má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$) právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon.$$

2. Posloupnost (a_n) je *omezená* právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že $|a_n| \leq K$ pro všechna n . *Neomezená* znamená, že omezená není, tj.

$$\forall K > 0 \exists n : |a_n| > K.$$

3. Dokážeme obměnou (kontrapozicí): ukážeme, že každá konvergentní posloupnost je omezená; neomezená posloupnost tedy nemůže konvergovat.

Nechť $a_n \rightarrow L$. Pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < 1$, a tedy

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1.$$

Mimo těchto členů zbývá jen konečně mnoho prvních členů $a_1, \dots, a_{n_0-1}$. Položíme

$$K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |L| + 1\}.$$

Pak $|a_n| \leq K$ pro všechna n , takže posloupnost je omezená. Je-li tedy (a_n) neomezená, nemůže být konvergentní. $\square$

(V PDF bez náčrtu řešení; náčrt doplněn k výkladu okruhu.)

3 Geometrická řada

(Reálná otázka: podzim 2023, č. 4 – Geometrická řada)

Zadání.

1. Definujte geometrickou řadu: řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je geometrická, právě když $a_n = \dots$
2. Uveďte, jaké součty má geometrická řada (v závislosti na příslušných parametrech).
3. Sečtěte řadu $\frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots$. Odpověď přiměřeně zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. ... právě když $a_n = q^n$ pro nějaké reálné číslo q .
2. Pro $|q| < 1$ má součet $\frac{1}{1-q}$, pro $q \geq 1$ má součet $+\infty$ a pro $q \leq -1$ součet nemá (součet neexistuje).
3. Součet je

$$(2/3)^2 \sum_{n \geq 0} (2/3)^n = \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} = \frac{4}{3}.$$

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): každý člen je $\frac{2}{3}$ -násobkem předchozího ($\frac{8}{27} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}$, $\frac{16}{81} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{27}$) a první člen je $\frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$, takže člen s indexem $n \geq 0$ je $(\frac{2}{3})^2 (\frac{2}{3})^n$. Po vytknutí $(\frac{2}{3})^2$ zbude geometrická řada s kvocientem $q = \frac{2}{3}$; protože $|q| < 1$, konverguje a její součet dává vzorec z bodu 2.

4 Nespojitost funkce

(Reálná otázka: jaro 2024, č. 4 – Nespojitost funkce)

Zadání.

Nechť $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce.

1. Definujte, co znamená, že f je *nespojita* v bodu $\frac{1}{2}$.
2. Je funkce f , když ji na tomto intervalu definujeme jako $f(x) = \frac{2x-1}{1-2x}$ pro $x \neq \frac{1}{2}$ a jako $f(\frac{1}{2}) = -1$, nespojitá v bodu $\frac{1}{2}$?
3. Pokud ji zadáme vzorcem $f(x) = \frac{2x-1}{1-2x}$ na celém intervalu $(0, 1)$, je f nespojitá v bodu $x = \frac{1}{2}$?

Odpovědi v částech 2 a 3 zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. Existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje číslo $x \in (0, 1)$, že $|x - \frac{1}{2}| < \delta$, ale $|f(x) - f(\frac{1}{2})| \geq \varepsilon$. Nebo: existuje posloupnost $(a_n) \subset (0, 1)$, že $\lim a_n = \frac{1}{2}$, ale $(f(a_n))$ nemá limitu $f(\frac{1}{2})$.

2. Není. Pro tuto funkci je $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ (což je vidět třeba z algebraické úpravy $\frac{2x-1}{1-2x} = -1$ pro $x \neq \frac{1}{2}$), takže (podle charakterizace spojitosti funkce v bodu pomocí limity) je tato f v $\frac{1}{2}$ spojitá, a ne nespojitá.
3. Ne, není; pro $x = \frac{1}{2}$ není ani definovaná.

5 Integrály a primitivní funkce

(Reálná otázka: podzim 2024, č. 3 – Integrály a primitivní funkce)

Zadání.

1. Definujte, co je „primitivní funkce“ k dané funkci f na daném otevřeném intervalu I .
2. Zformulujte pravidlo „per partes“ (též známé jako integrování po částech) pro výpočet primitivní funkce. Můžete se pro jednoduchost omezit na situaci, kdy všechny uvažované funkce jsou spojitě.
3. Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast roviny ohraničená zdola osou x a shora grafem funkce $f(x) = x \cos(x)$ pro $x \in [0, \pi/2]$. Formálněji řečeno,

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq y \leq x \cos(x) \right\}.$$

Spočítejte plošný obsah oblasti P .

Náčrt řešení.

1. Funkce F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I , pokud má F v každém bodě $x \in I$ derivaci rovnou $f(x)$.
2. Pravidlo pro integrování per partes říká, že pokud na nějakém intervalu I jsou f a g spojitě funkce, F je primitivní funkce k f a G je primitivní funkce ke g , pak na tomto intervalu platí

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx.$$

3. Hledaný plošný obsah lze vyjádřit pomocí integrálu jako $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$. Hodnotu integrálu určíme použitím metody per partes pro výpočet určitého integrálu:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx &= [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

¹V originálním PDF je zde uvedeno „pro $x \neq -1$ “; jde o překlep. Úprava $\frac{2x-1}{1-2x} = -1$ platí pro všechna x s $1-2x \neq 0$, tj. pro $x \neq \frac{1}{2}$; zde uvedeno korektně.

6 Základy analýzy

(Reálná otázka: podzim 2025, č. 3 – Základy analýzy)

Zadání.

Nechť $p \in (0, +\infty)$ je kladné reálné číslo. Označme U_p rovinný útvar, který je zleva ohraničen přímkou $x = p$, zprava přímkou $x = p + 1$, zdola osou x a shora grafem funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Jinými slovy,

$$U_p = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; p \leq x \leq p + 1 \wedge 0 \leq y \leq x + \frac{1}{x} \right\}.$$

1. Ukažte, že U_p má obsah $p + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}$ čtverečních jednotek.
2. Existuje v intervalu $(0, 100)$ nějaká hodnota p , pro kterou má U_p obsah větší než 10 000 čtverečních jednotek?
3. Najděte hodnotu $p \in (0, +\infty)$, pro niž obsah U_p nabývá svého minima, případně ukažte, že taková hodnota neexistuje.

Náčrt řešení.

1. Označme $u(p)$ obsah útvaru U_p . Tento obsah je roven integrálu $\int_p^{p+1} f(x) dx$. Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ má primitivní funkci $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Hledaný obsah je tedy roven

$$\begin{aligned} u(p) &= F(p+1) - F(p) \\ &= \frac{(p+1)^2}{2} + \ln(p+1) - \frac{p^2}{2} - \ln(p) \\ &= \frac{2p+1}{2} + \ln(p+1) - \ln(p) \\ &= p + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \\ &= p + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Zde si stačí všimnout, že funkce $u(p)$ má pro p jdoucí k nule zprava limitu $+\infty$, a tedy na libovolném pravém okolí nuly nabývá libovolně velkých hodnot. Pro dostatečně malé $p > 0$ má tedy U_p obsah větší než 10 000 čtverečních jednotek.
3. Pomocí aritmetiky derivací a pravidel pro derivování složené funkce zjistíme, že funkce $u(p)$ má na uvažovaném intervalu $(0, +\infty)$ derivaci

$$u'(p) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \cdot \frac{-1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p^2 + p}.$$

Vyřešením kvadratické rovnice zjistíme, že jediné kladné p_0 splňující $u'(p_0) = 0$ je $p_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Zároveň vidíme, že $u'(p)$ je rostoucí funkce – to lze vidět přímo ze vzorce pro $u'(p)$, případně výpočtem druhé derivace

$$u''(p) = \frac{2p+1}{(p^2+p)^2},$$

která je pro $p \in (0, +\infty)$ zjevně kladná. Z toho plyne, že $u'(p)$ je záporná pro $p \in (0, p_0)$ a kladná pro $p > p_0$, a tedy funkce $u(p)$ je klesající na intervalu $(0, p_0]$ a rostoucí na intervalu $[p_0, +\infty)$. Funkce $u(p)$ tedy v bodě p_0 nabývá své jediné minimum.