

Základy diferenciálního a integrálního počtu

Studijní materiál ke státnicím (M1)

Jakub Klesa

Pokryté předměty: NMAI054 (Matematická analýza 1)

Obsah

Úvod	1
1 Posloupnosti reálných čísel a jejich limity	2
2 Řady	4
3 Reálné funkce jedné proměnné: limity a spojitost	5
3.1 Limita funkce v bodě	5
3.2 Spojitost a její důsledky na intervalu	6
4 Derivace a její aplikace	7
4.1 l'Hospitalovo pravidlo	8
4.2 Vyšetření průběhu funkce	9
4.3 Taylorův polynom (limitní forma)	10
5 Integrály a jejich aplikace	11
5.1 Primitivní funkce a metody výpočtu	12
5.2 Určitý integrál: Newtonův a Riemannův	13
5.3 Souvislost s primitivní funkcí (základní věty analýzy)	14
5.4 Aplikace integrálů	14
Shrnutí	17
Zdroje	19

Úvod

Tento materiál pokrývá okruh **M1 – Základy diferenciálního a integrálního počtu** (předmět NMAI054, Matematická analýza 1). Výklad je postaven primárně na zápiscích z přednášky doc. Jelínka; značení a hloubka odpovídají kurzu pro informatiky.

Věty uvádíme *se zněním*, doplněné intuicí a krátkými odvozeními tam, kde pomáhají pochopení; rozsáhlé formální důkazy vynecháváme. Do výkladu jsou zařazeny řešené reálné otázky SZS z let 2022–2026; všechny otázky k okruhu jsou pohromadě v samostatném dokumentu *Příklady otázek*. Použité zdroje jsou uvedeny na konci.

Značení. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$ jsou reálná čísla a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ je množina *rozšířených* reálných čísel. Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ rozumíme interval $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, *prstencové okolí* $P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$ je okolí bez bodu a . Okolí nekonečen: $U(+\infty, \delta) = (1/\delta, +\infty)$, $U(-\infty, \delta) = (-\infty, -1/\delta)$.

1 Posloupnosti reálných čísel a jejich limity

Posloupnost je zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, píšeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Základní otázkou je, zda se členy posloupnosti k něčemu „blíží“, a pokud ano, k čemu. To formalizuje pojem limity.

Definice – Limita posloupnosti

Řekneme, že posloupnost (a_n) má *limitu* $a \in \mathbb{R}^*$, píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, pokud pro každé okolí $U(a, \varepsilon)$ existuje index n_0 tak, že $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro všechna $n > n_0$. Pro vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ to znamená

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Posloupnost s *vlastní* limitou ($a \in \mathbb{R}$) se nazývá *konvergentní*, jinak *divergentní* (sem patří i nevlastní limity $\pm\infty$).

Intuice. Od jistého indexu dál leží *všechny* členy posloupnosti v libovolně malém okolí limity. „Libovolně malé“ se formalizuje jako „pro každé $\varepsilon > 0$ “: čím menší ε zvolíme, tím dál (větší n_0) možná musíme jít, ale vždy se to podaří.

Definice – Omezenost a monotonie

Posloupnost (a_n) je *shora omezená*, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ s $a_n \leq K$ pro všechna n ; *zdola omezená* obdobně ($a_n \geq K$); *omezená*, je-li omezená shora i zdola. Dále je (a_n) *neklesající*, platí-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna n , *nerostoucí* při $a_n \geq a_{n+1}$, *rostoucí* při $a_n < a_{n+1}$ a *klesající* při $a_n > a_{n+1}$. Je *monotónní*, je-li neklesající nebo nerostoucí (ryze *monotónní* při rostoucí či klesající). Pro funkci f na intervalu J se tyto pojmy zavádějí přes funkční hodnoty: např. f je *rostoucí*, platí-li $f(x) < f(y)$ pro každá $x < y$ z J (ostatní varianty obdobně).

Limita je určena jednoznačně. Dále platí, že každá konvergentní posloupnost je omezená (opak neplatí: $a_n = (-1)^n$ je omezená, ale nemá limitu). Důležitou postačující podmínkou pro existenci limity je monotonie:

★ Věta – Limita monotónní posloupnosti

Každá monotónní posloupnost má limitu (případně nevlastní). Je-li navíc omezená, je tato limita vlastní, takže posloupnost konverguje.

Pro praktický výpočet limit slouží aritmetika limit. Pozor: funguje jen tehdy, je-li pravá strana definovaná (neurčitě výrazy jako $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ , $a/0$ jsou vyloučené).

★ Věta – Aritmetika limit

Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Pak (pokud je pravá strana definována)

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim(a_n b_n) = ab, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n \neq 0).$$

Navíc: je-li (a_n) omezená a $\lim b_n = 0$, pak $\lim(a_n b_n) = 0$.

Poznámka. Aritmetika limit je *jednosměrná*. Z konvergence součtu $(a_n + b_n)$ neplyne konvergence jednotlivých posloupností: pro $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$ součet konverguje (k 0), ale ani jedna z posloupností limitu nemá.

★ Věta – O limitě a uspořádání

Nechť $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$ (v $\mathbb{R}^*$). Pak

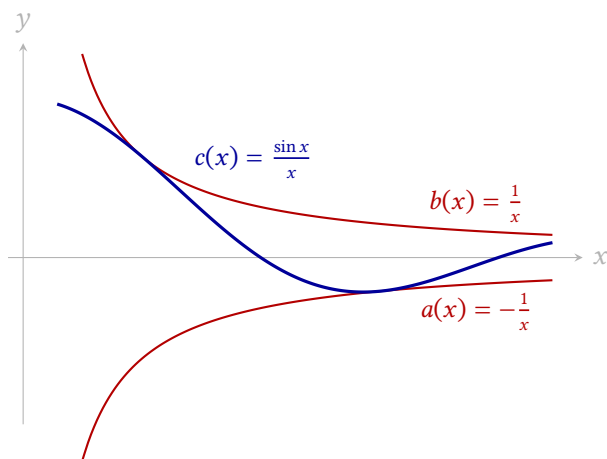
1. je-li $a < b$, existuje n_0 tak, že $a_n < b_n$ pro všechna $n > n_0$;
2. je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna $n > n_0$, pak $a \leq b$.

i Poznámka. Ostrá nerovnost se v limitě může „zkazit“ na neostrou: $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1 = b_n$ pro všechna n , ale obě limity jsou rovny 1.

★ Věta – O dvou policajtech

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$ a pro všechna $n > n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom (c_n) konverguje a $\lim c_n = a$.

💡 Intuice. Posloupnost (c_n) je „sevrěna“ mezi dvěma posloupnostmi („policajty“), které míří do téhož bodu; nemá tedy kam jít. Pro nevlastní limitu stačí jeden policajt: dolní odhad jdoucí do $+\infty$ vynutí $\lim c_n = +\infty$.



Funkce $c(x) = \frac{\sin x}{x}$ je pro $x > 0$ „uvězněna“ mezi $a(x) = -\frac{1}{x}$ a $b(x) = \frac{1}{x}$. Oba policajti mají pro $x \rightarrow \infty$ limitu 0, proto ji má i sevřená funkce.

🔧 Příklad – Výpočet limity sevřením

Zadání. Spočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$.

Řešení. Protože $-1 \leq \sin n \leq 1$, platí $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Krajní posloupnosti mají limitu 0, podle věty o dvou policajtech je tedy i $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$. (Alternativně: $\frac{1}{n}$ je nulová a $\sin n$ omezená, takže součin jde k 0.)

🔧 Příklad – SZZ podzim 2022 č. 3: Posloupnosti – limita a omezenost

(Reálná otázka SZZ: podzim 2022, č. 3 – Posloupnosti (limita, omezenost))

Zadání. Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. (1) Definujte, co znamená, že (a_n) je *konvergentní* (má vlastní limitu). (2) Definujte, co znamená, že (a_n) je *neomezená*. (3) Dokažte, že je-li (a_n) neomezená, pak *nekonverguje*.

Řešení.

1. (a_n) konverguje (má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$) právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon$.
2. (a_n) je *omezená*, existuje-li $K > 0$ s $|a_n| \leq K$ pro všechna n ; *neomezená* znamená, že omezená není, tj. $\forall K > 0 \exists n : |a_n| > K$.

3. Dokážeme obměnou: ukážeme, že každá konvergentní posloupnost je omezená. Nechť $a_n \rightarrow L$. Pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ je $|a_n| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1$. Mimo to zbývá jen konečně mnoho členů, takže s $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |L| + 1\}$ platí $|a_n| \leq K$ pro všechna n . Je-li tedy (a_n) neomezená, nemůže konvergovat.

2 Řady

Řada je formální nekonečný součet členů posloupnosti. Místo abychom sčítali „všechno najednou“, sledujeme posloupnost částečných součtů a ptáme se na její limitu; tím se otázka o nekonečném součtu převede na limitu posloupnosti.

Definice – Řada, částečný součet, součet

Nechť $(a_n)_{n \geq 0}$ je posloupnost reálných čísel. N -tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$. Pokud existuje vlastní limita $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$, řada *konverguje* a tuto limitu nazýváme jejím *součtem*. Jinak (limita neexistuje nebo je nevlastní) řada *diverguje*.

Nejdůležitějším příkladem je řada, jejíž členy tvoří geometrickou posloupnost.

Definice – Geometrická řada

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *geometrická*, právě když $a_n = q^n$ pro nějaké $q \in \mathbb{R}$; číslu q říkáme *kvocient*.

U geometrické řady umíme součet spočítat přesně. Pro $q \neq 1$ má částečný součet uzavřený tvar $s_N = 1 + q + \dots + q^N = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$ (ověří se vynásobením $(q - 1)s_N$). O chování součtu pak rozhoduje jen to, co dělá mocnina q^{N+1} :

★ Věta – Součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1, \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

 **Intuice.** Pro $|q| < 1$ se členy q^n zmenšují geometricky rychle, takže nekonečný součet „doběhne“ ke konečné hodnotě (z $q^{N+1} \rightarrow 0$ plyne $s_N \rightarrow \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$). Pro $q \geq 1$ se členy nezmenšují a součet roste do $+\infty$; pro $q \leq -1$ hodnota q^{N+1} střídá znaménko a v absolutní hodnotě neklesá, takže limita neexistuje.

 **Poznámka.** „Členy jdou k nule“ je pro konvergenci nutné, ale *nestačí*. Učebnicový protipříklad je *harmonická řada* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$: členy klesají k nule, ale řada diverguje. Obecněji $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ konverguje právě pro $s > 1$ (důkaz integrálním kritériem, viz sekci o integrálech).

 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 1 – The essence of calculus (vizuální intuice k nekonečným součtům a kalkulu).

Příklad – SZZ podzim 2023 č. 4: Geometrická řada

(Reálná otázka SZZ: podzim 2023, č. 4 – Geometrická řada)

Zadání. Sečtěte $\frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots$.

Řešení. Členy jsou tvaru $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$, jde tedy o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{2}{3}$. Po vytknutí $(2/3)^2$ a dosazení do vzorce:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} = \frac{4}{3}.$$

3 Reálné funkce jedné proměnné: limity a spojitost

Pojem limity přenášíme z posloupností na funkce. Funkce f je definovaná na nějaké podmnožině $\mathbb{R}$; limitu v bodě zkoumáme na prstencovém okolí (hodnota v samotném bodě limitu neovlivní).

3.1 Limita funkce v bodě

Definice – Limita funkce

Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a^+} f$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f$, definujeme nahrazením $P(a, \delta)$ pravým, resp. levým prstencovým okolím. Platí: $\lim_{x \rightarrow a} f = A$ právě tehdy, když obě jednostranné limity existují a rovnají se A .

 **Intuice.** Blíží-li se x k a (zleva i zprava, ale $x \neq a$), blíží se $f(x)$ k A . Totéž říká *Heineho věta* (charakterizace limity funkce přes limity posloupností, jež zpřístupňuje aparát ze sekce o posloupnostech): $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \rightarrow a$ s $x_n \neq a$ platí $f(x_n) \rightarrow A$. Hodí se hlavně k důkazu, že limita *neexistuje*: stačí najít dvě posloupnosti $x_n, y_n \rightarrow a$ s různými limitami $f(x_n), f(y_n)$.

Pro výpočet platí stejná pravidla jako u posloupností.

★ Věta – Aritmetika limit funkcí

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ($\in \mathbb{R}^*$). Pak (je-li pravá strana definována)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = A + B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (fg) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \quad (g \neq 0 \text{ na okolí}).$$

★ Věta – Limity funkcí a uspořádání

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ($\in \mathbb{R}^*$), vztahy uvažujeme na nějakém prstencovém okolí a . Pak

1. je-li $A < B$, pak $f(x) < g(x)$ na nějakém okolí;
2. je-li $f(x) \leq g(x)$ na okolí, pak $A \leq B$;
3. (dva policajti) je-li $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ na okolí a $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow a} g = A$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} h = A$.

★ Věta – Limita složené funkce

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ a $\lim_{y \rightarrow B} f(y) = C$. Je-li navíc splněna aspoň jedna z podmínek (P1) f je spojitá v B (tj. $f(B) = C$), nebo (P2) g na nějakém prstencovém okolí a nenabývá hodnoty B , potom $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = C$.

i Poznámka. Některá z podmínek (P1)/(P2) je nutná. Protipříklad bez ní: $g(x) \equiv 0$ (tedy $B = 0$) a f daná $f(0) = 1$, $f(y) = 0$ pro $y \neq 0$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0} g = 0$ i $\lim_{y \rightarrow 0} f = 0$, ale $f(g(x)) = f(0) = 1 \neq 0$. Selhává to právě proto, že f není v 0 spojitá (neplatí P1) a zároveň g hodnotu 0 nabývá všude (neplatí P2).

3.2 Spojitost a její důsledky na intervalu

📖 Definice – Spojitost

Funkce f je *spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Je *spojitá na intervalu* I , je-li spojitá v každém vnitřním bodě I a v krajních bodech odpovídajícím způsobem jednostranně spojitá.

📖 Definice – Nespojitost v bodě

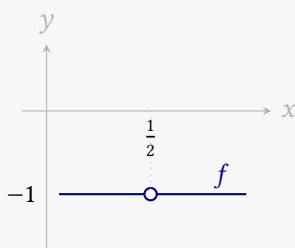
Funkce f je v bodě a *nespojita*, pokud v a není spojitá, tj. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ buď neexistuje, nebo se nerovná $f(a)$ (což předpokládá, že f je v a definovaná). Ekvivalentně: existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ je nějaké x s $|x - a| < \delta$, ale $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

🔍 Příklad – SZZ jaro 2024 č. 4: Nespojitost funkce

(Reálná otázka SZZ: jaro 2024, č. 4 – Nespojitost funkce)

Zadání. Nechť $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Je f nespojita v bodě $\frac{1}{2}$, pokud (a) je $f(x) = \frac{2x-1}{1-2x}$ pro $x \neq \frac{1}{2}$ a $f(\frac{1}{2}) = -1$; (b) je f dána jen vzorcem $\frac{2x-1}{1-2x}$ na celém $(0, 1)$?

Řešení. Pro $x \neq \frac{1}{2}$ je $\frac{2x-1}{1-2x} = -1$, takže $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = -1$. (a) Při $f(\frac{1}{2}) = -1$ se limita rovná funkční hodnotě, takže f je v $\frac{1}{2}$ spojitá, tedy *nenespojitá*. (b) Je-li f dána jen vzorcem, není v $\frac{1}{2}$ vůbec definovaná, takže o spojitosti ani nespojivosti v tomto bodě nemá smysl mluvit.



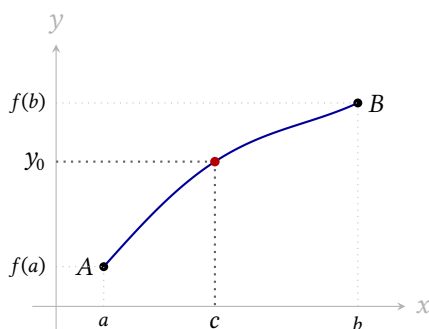
Mimo bod $\frac{1}{2}$ je $f \equiv -1$ a limita zleva i zprava je -1 (prázdný kroužek). Jde o *odstranitelnou* situaci: doplníme-li $f(\frac{1}{2}) = -1$, funkce se stane spojitou.

Spojitě funkce na intervalu mají dvě klíčové vlastnosti.

★ Věta – Darbouxova, o nabývání mezihodnot

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $m = \min\{f(a), f(b)\}$, $M = \max\{f(a), f(b)\}$. Pak pro každé $y \in [m, M]$ existuje $\alpha \in [a, b]$ s $f(\alpha) = y$. Speciálně spojitá funkce zobrazuje interval na interval.

💡 Intuice. Spojitý graf nemůže „přeskočit“ hodnotu: jde-li od $f(a)$ k $f(b)$, projde po cestě každou mezhodnotu. Praktickým důsledkem je metoda půlení intervalů pro hledání kořenů (např. $f(x) = x^2 - 2$ má kořen mezi 1 a 2, neboť $f(1) < 0 < f(2)$).



Spojitá funkce nabývá každé hodnoty y_0 mezi $f(a)$ a $f(b)$: vodorovná hladina y_0 protne graf v bodě $c \in [a, b]$ s $f(c) = y_0$.

★ Věta – Princip maxima pro spojitě funkce

Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na *kompaktním* (uzavřeném a omezeném) intervalu, pak na $[a, b]$ nabývá svého maxima i minima (a je tedy omezená).

💡 Poznámka. Oba předpoklady jsou nutné. Funkce $f(x) = x$ na otevřeném $(0, 1)$ je spojitá, ale maxima ani minima nenabývá; $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$ není ani omezená. Bez spojitosti maximum existovat nemusí ani na $[a, b]$.

📺 Video: 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 7 – Limits, L'Hôpital's rule, and epsilon delta definitions (limity, ϵ - δ , l'Hospital).

4 Derivace a její aplikace

Derivace měří okamžitou rychlost změny funkce a umožňuje funkci lokálně aproximovat přímkou (tečnou).

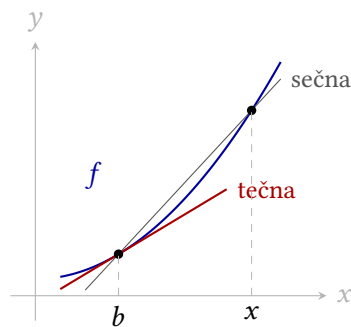
📖 Definice – Derivace v bodě

Nechť f je definovaná na okolí bodu b . Derivací f v b rozumíme limitu

$$f'(b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Je-li tato limita vlastní, říkáme, že f je v b *diferencovatelná*. Jednostranné derivace $f'_+(b)$, $f'_-(b)$ definujeme příslušnými jednostrannými limitami.

💡 Intuice. Zlomek $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ je směrnice sečny body $(x, f(x))$ a $(b, f(b))$. Když $x \rightarrow b$, blíží se sečna k *tečně* a její směrnice k $f'(b)$. Tečna $t(x) = f(b) + f'(b)(x - b)$ je nejlepší lineární aproximace f v okolí b .



Derivace jako směrnice tečny: pro $f(x) = 0,3x^2 + 0,2$ a $b = 1$ je $f(b) = 0,5$, $f(2,6) = 2,228$; směrnice sečny $\frac{2,228-0,5}{2,6-1} = 1,08$ se při $x \rightarrow b$ blíží směrnici tečny $f'(b) = 0,6$ $b = 0,6$.

★ Věta – Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost

Má-li f v b vlastní derivaci, je v b spojitá. (Opak neplatí: $|x|$ je v 0 spojitá, ale nemá tam derivaci.)

★ Věta – Pravidla pro derivování

Mají-li f, g v b derivaci (vlastní či nevlastní) a je-li pravá strana definovaná, platí

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\alpha f)' = \alpha f', \quad (fg)' = f'g + fg' \text{ (Leibniz)}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g(b) \neq 0).$$

U součinu musí být navíc f nebo g v b spojitá, u podílu g spojitá v b . (Je-li derivace vlastní, spojitost plyne z předchozí věty, takže u vlastních derivací je předpoklad splněn automaticky.) Dále *řetízkové pravidlo* pro složenou funkci: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$, a pravidlo pro inverzní funkci: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, kde $y_0 = f(x_0)$ a $f'(x_0) \neq 0$.

i Poznámka. [Derivace elementárních funkcí] $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\exp x)' = \exp x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Vyjde-li na pravé straně pravidel neurčitý výraz (např. $(+\infty) \cdot 0$), o derivaci vlevo nic neplatí. A i když neurčitý výraz nevyjde, bez ověření spojitosti lze dostat chybný výsledek: pro $f = g = \frac{1}{10} + \operatorname{sgn} x$ dá Leibnizův vzorec v 0 zdánlivě $+\infty$, ve skutečnosti ale fg v 0 derivaci nemá (jednostranné derivace jsou $+\infty$ a $-\infty$).

► **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 2 – The paradox of the derivative (co je derivace; navazují kap. 3–4: vzorce geometricky, řetízkové a součinné pravidlo).

► **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 5 – What's so special about Euler's number e ? (proč $(\exp x)' = \exp x$ a odkud se bere e).

4.1 l'Hospitalovo pravidlo

★ Věta – l'Hospitalovo pravidlo

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g mají na prstencovém okolí $P(a, \delta)$ vlastní derivaci a $g' \neq 0$. Je-li splněno

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad \text{nebo}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty,$$

$$\text{a existuje-li } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*, \text{ pak i } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

i Poznámka. Pravidlo řeší jen neurčité výrazy $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Pokud předpoklad neplatí (čitatel a jmenovatel nejdou oba k nule ani k nekonečnu), je jeho použití *chybné*. Také: pokud $\lim f'/g'$ *neexistuje*, pravidlo neříká nic (limita f/g může přesto existovat).

Příklad — Správné použití l'Hospitala

Zadání. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Řešení.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

4.2 Vyšetření průběhu funkce

Derivace jsou hlavním nástrojem pro určení monotonie, extrémů a konvexity, z nichž lze sestavit náčrt grafu.

★ Věta — Nutná podmínka lokálního extrému

Nabývá-li f v bodě a lokálního extrému a má tam derivaci, je $f'(a) = 0$. Ekvivalentně (kontrapozicí): má-li f v a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$, pak v a lokální extrém *nemá*. Lokální extrém tedy může nastat jen tam, kde $f'(a) = 0$ nebo kde derivace neexistuje (např. v krajních bodech intervalu).

★ Věta — Derivace a monotonie

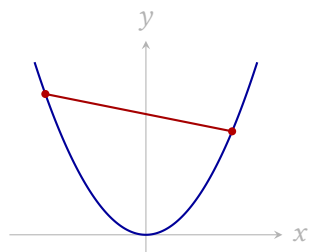
Nechť f je spojitá na intervalu J a má derivaci v jeho vnitřních bodech. Je-li $f' > 0$ na vnitřku J , je f na J rostoucí; je-li $f' < 0$, je klesající ($s \geq, \leq$ obdobně neklesající/nerostoucí). Je-li $f' \equiv 0$, je f konstantní.

Definice — Konvexita a konkavita

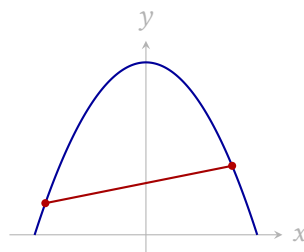
Funkce f je na intervalu I *konvexní*, leží-li její graf na každém podintervalu pod úsečkou spojující krajní body grafu, tj. pro $a < x < b$ z I

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

konkávni je při opačné nerovnosti (graf nad úsečkou). U ostrých nerovností mluvíme o *ryzí konvexitě/konkavitě*.



konvexní: tětiva nad grafem



konkávni: tětiva pod grafem

★ Věta — Druhá derivace a konvexita

Má-li f na otevřeném intervalu I druhou derivaci, pak: $f'' > 0$ na $I \Rightarrow f$ je ryze konvexní; $f'' < 0 \Rightarrow$ ryze konkávni. Bod, kde graf přechází z jedné strany tečny na druhou (mění se konvexita/konkavita), je *inflexní bod*.

i Poznámka. [Rolleova a Lagrangeova věta] Na pozadí těchto tvrzení stojí věty o střední hodnotě. *Rolleova:* je-li f spojitá na $[a, b]$, má derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b)$, existuje $c \in (a, b)$ s $f'(c) = 0$. *Lagrangeova:* za týchž předpokladů (bez $f(a) = f(b)$) existuje c s $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – tj. někde je tečna rovnoběžná se sečnou koncových bodů.

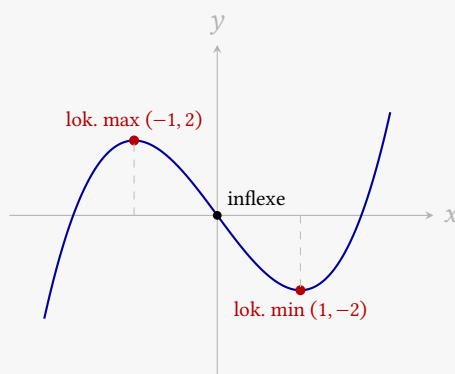
Příklad – Vyšetření průběhu

Zadání. Vyšetřete průběh $f(x) = x^3 - 3x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Funkce je lichá, spojitá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$.

Monotonie a extrémy. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, takže $f' > 0$ na $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$ (rostoucí) a $f' < 0$ na $(-1, 1)$ (klesající). V $x = -1$ je proto lokální maximum $f(-1) = 2$, v $x = 1$ lokální minimum $f(1) = -2$.

Konvexita. $f''(x) = 6x$, tedy f je konkávní na $(-\infty, 0)$ a konvexní na $(0, \infty)$; v $x = 0$ je inflexní bod ($f(0) = 0$).



Průběh $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3x^2 - 3$, kořeny ± 1 ($f'(\pm 1) = 0$) odpovídají lokálním extrémům $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$; $f''(0) = 0$ je inflexní bod (svislé měřítko zhuštěno).

4.3 Taylorův polynom (limitní forma)

Tečna je nejlepší aproximace přímkou. Taylorův polynom je analogická nejlepší aproximace polynomem stupně n .

Definice – Taylorův polynom

Má-li f v bodě a vlastní n -tou derivaci, je *Taylorův polynom řádu n* funkce f v a roven

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

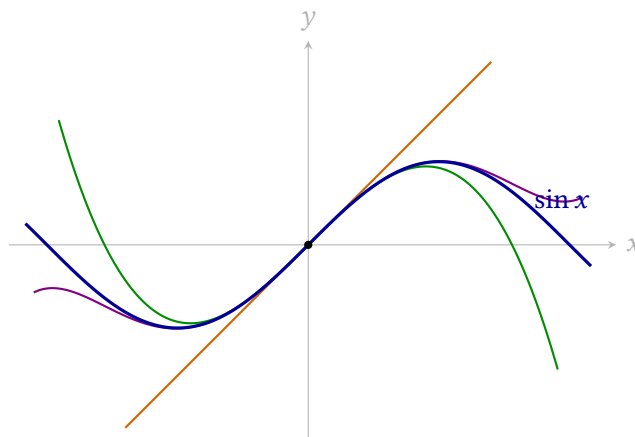
★ Věta – Charakterizace Taylorova polynomu – limitní forma

$T_n^{f,a}(x)$ je *jediný* polynom stupně nejvýše n , pro který platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

což zapisujeme též $f(x) = T_n^{f,a}(x) + o(|x-a|^n)$ pro $x \rightarrow a$.

💡 Intuice. Taylorův polynom „kopíruje“ funkci v bodě a až do n -té derivace ($T^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$). Zbytek $f - T_n$ klesá k nule rychleji než $(x - a)^n$ – proto je T_n nejlepší možná aproximace polynomem daného stupně. Maclaurinovy rozvoje (se středem 0): $\exp x = \sum \frac{x^n}{n!}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$



Taylorovy polynomy $\sin x$ kolem středu 0: $T_1(x) = x$ (oranžová), $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (zelená), $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (fialová). Vyšší stupeň dává lepší shodu se $\sin x$ v okolí středu; na krajích se každý polynom nakonec rozejde.

📌 Poznámka. Velikost chyby udává *Lagrangeův tvar zbytku*: $f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ pro nějaké c mezi a a x . Taylorův polynom také usnadňuje výpočet limit typu $\frac{0}{0}$: čitatel i jmenovatel se nahradí rozvojem dostatečného řádu (často méně pracné než opakovaný l'Hospital).

Příklad – Limita přes Taylorův polynom

Zadání. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ pomocí Taylorova rozvoje.

Řešení. Z $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ plyne $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$, takže

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Stačil jeden rozvoj místo trojího derivování.

 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 11 – Taylor series (Taylorovy řady vizuálně).

5 Integrály a jejich aplikace

Integrovaní je v jistém smyslu opačná operace k derivování: ze známé „rychlosti“ (derivace) rekonstruuje funkci. Z toho vyrůstá výpočet ploch, objemů a odhadů součtů.

5.1 Primitivní funkce a metody výpočtu

Definice – Primitivní funkce

Nechť f je definovaná na otevřeném intervalu I . Funkce F je *primitivní funkcí* k f na I , pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Množinu primitivních funkcí značíme $\int f(x) dx$.

★ Věta – Jednoznačnost až na konstantu

Je-li F primitivní k f na intervalu I , jsou primitivními funkcemi právě všechny funkce $F + c$, $c \in \mathbb{R}$. (Dvě primitivní funkce se liší o konstantu.) Každá spojitá funkce na otevřeném intervalu primitivní funkci má.

Univerzální vzorec pro primitivní funkci součinu nebo podílu neexistuje; dvě základní techniky pocházejí z pravidel pro derivování složené funkce a součinu.

★ Věta – Substitute a per partes

Nechť uvažované funkce jsou spojitě. Pak:

$$\text{(substitute)} \quad \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c, \quad \text{kde } F = \int f,$$

$$\text{(per partes)} \quad \int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx,$$

kde F je primitivní k f a G primitivní k g .

 **Intuice.** *Substitute* čte řetízkové pravidlo pozpátku („ $\varphi'(t) dt$ “ se schová do „ dx “). *Per partes* čte pozpátku Leibnizovo pravidlo $(FG)' = fG + Fg$: jednu funkci derivujeme, druhou integrujeme, výhodné když se tím integrál zjednoduší.

Příklad – Substitute

Zadání. Spočítejte $\int x e^{x^2} dx$.

Řešení. Volbou $t = x^2$ máme $dt = 2x dx$, tedy $x dx = \frac{1}{2} dt$:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

U *určitého* integrálu navíc přepočítáme meze dosazením do $t = \varphi(x)$, takže se není nutné vracet k původní proměnné.

Příklad – SZZ léto 2022 č. 3: Integrace per partes, $\int x \sin x$

(Reálná otázka SZZ: léto 2022, č. 3 – Integrál (per partes))

Zadání. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdný otevřený interval. (1) Jaký je vztah mezi dvěma primitivními funkcemi k téže funkci na I ? Zdůvodněte. (2) Pro $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ s primitivními funkcemi F, G napište vzorec pro primitivní funkci k fG , známe-li primitivní funkci k Fg . (3) Podle tohoto vzorce najděte primitivní funkci k $f(x) = x \sin x$.

Řešení.

1. Dvě primitivní funkce k téže funkci na intervalu se liší o konstantu: jsou-li F_1, F_2 obě primitivní k f , má $F_1 - F_2$ na I nulovou derivaci, je tedy konstantní.

2. Z Leibnizova pravidla $(FG)' = fG + Fg$ integrací plyne per partes

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx,$$

tj. primitivní k fG je $F \cdot G$ minus primitivní k Fg .

3. Volíme $F = x$ ($f = 1$) a $G = -\cos x$ ($g = \sin x$); pak $fG = -\cos x$ a $Fg = x \sin x$. Ze vzorce $\int (-\cos x) dx = x(-\cos x) - \int x \sin x dx$, tj. $-\sin x = -x \cos x - \int x \sin x dx$, odkud

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C.$$

(Ověření: $(\sin x - x \cos x)' = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$.)

 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 8 – Integration and the fundamental theorem of calculus (integrál a jeho souvislost s derivací).

5.2 Určitý integrál: Newtonův a Riemannův

Existují dvě cesty k určitému integrálu. *Newtonův* stojí na primitivní funkci, *Riemannův* na ploše pod grafem; za rozumných předpokladů dávají totéž.

Definice – Newtonův integrál

Má-li f na (a, b) primitivní funkci F s vlastními jednostrannými limitami $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F$ a $F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F$, definujeme

$$(N) \int_a^b f(x) dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+).$$

Definice nezávisí na volbě F (liší se jen o konstantu). Třidu funkcí, které mají na (a, b) Newtonův integrál, značíme $N(a, b)$.

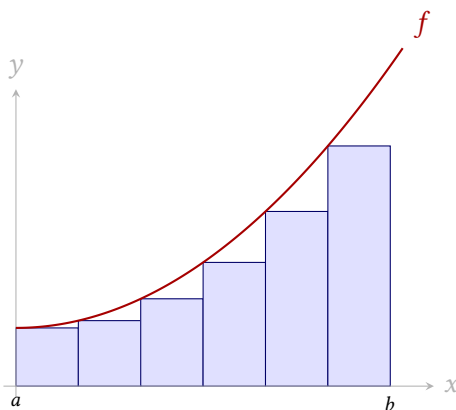
Definice – Riemannův integrál

Dělením intervalu $[a, b]$ je $D = (a_0, \dots, a_k)$ s $a = a_0 < \dots < a_k = b$; klade intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Dolní a horní Riemannova suma jsou

$$s(f, D) = \sum_i |I_i| m_i, \quad S(f, D) = \sum_i |I_i| M_i, \quad m_i = \inf_{I_i} f, \quad M_i = \sup_{I_i} f.$$

Dolní a horní integrál jsou $\int_a^b f = \sup_D s(f, D)$ a $\overline{\int}_a^b f = \inf_D S(f, D)$. Pokud se rovnají a jsou konečné, jejich společnou hodnotu nazýváme *Riemannovým integrálem* $\int_a^b f$. Třidu riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a, b]$ značíme $R[a, b]$.

 **Intuice.** Riemannův integrál formalizuje obsah plochy pod grafem: zdola ji odhadujeme „schody“ pod grafem (dolní sumy), shora „schody“ nad grafem (horní sumy). Když lze rozdíl horní a dolní sumy učinit libovolně malým, oba odhady splynou a definují obsah. (Funkce musí být omezená; např. Dirichletova funkce integrovatelná není.)



Dolní Riemannova suma pro $f(x) = 0,25x^2 + 0,5$ na $[a, b] = [0, 3]$ s dělením $\Delta x = 0,5$ (6 obdélníků): výšky v levých krajích, neboť f roste. Horní suma by použila pravé kraje; zjemňováním dělení ($\Delta x \rightarrow 0$) se obě sumy sevrou k obsahu pod grafem.

★ Věta — Postačující podmínky integrovatelnosti

Je-li f na $[a, b]$ spojitá, nebo je-li na $[a, b]$ monotónní, pak má na $[a, b]$ Riemannův integrál.

5.3 Souvislost s primitivní funkcí (základní věty analýzy)

★ Věta — 1. základní věta analýzy

Nechť $f \in R[a, b]$ a $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pak F je na $[a, b]$ spojitá a v každém bodě x_0 , kde je f spojitá, platí $F'(x_0) = f(x_0)$. Speciálně každá spojitá funkce má primitivní funkci.

★ Věta — 2. základní věta analýzy

Existují-li oba integrály, jsou si rovny: pro $f \in R[a, b] \cap N(a, b)$ platí

$$\int_a^b f = (N) \int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Proto u určitého integrálu obvykle nerozlišujeme, zda jde o Newtonův či Riemannův. Spojité funkce mají oba a shodují se.

💡 Intuice. Derivování a integrování jsou navzájem inverzní operace: derivace „rozbalí“ plochu naakumulovanou funkcí ($F' = f$), zatímco určitý integrál „naakumuluje“ hodnoty f a výsledek je rozdíl primitivní funkce v krajních bodech. To je obsah obou základních vět.

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Calculus kap. 9 – What does area have to do with slope? (intuice za základními větami analýzy: plocha $\leftrightarrow$ směrnice).

5.4 Aplikace integrálů

Obsah rovinných útvarů. Obsah útvaru pod grafem nezáporné funkce f na $[a, b]$ je přímo $\int_a^b f(x) dx$.

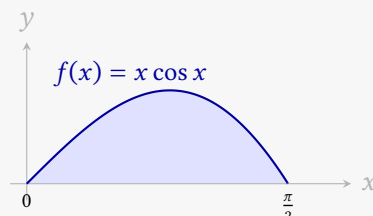
🔖 Příklad — SZZ podzim 2024 č. 3: Integrály a primitivní funkce

(Reálná otázka SZZ: podzim 2024, č. 3 – Integrály a primitivní funkce)

Zadání. Spočítejte obsah útvaru pod grafem $f(x) = x \cos x$ pro $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Řešení. Obsah je $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$. Per partes volíme $f = \cos x$, $G = x$ (tedy $F = \sin x$, $g = G' = 1$), takže $\int fG = FG - \int Fg$:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$



Vyznačená plocha pod grafem $f(x) = x \cos x$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$ se rovná hodnotě integrálu $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$.

Příklad – SZZ podzim 2025 č. 3: Základy analýzy

(Reálná otázka SZZ: podzim 2025, č. 3 – Základy analýzy)

Zadání. Útvar U_p ($p > 0$) je ohraničen přímkami $x = p$, $x = p + 1$, osou x a grafem $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- (1) Ukažte, že má obsah $p + \ln(1 + \frac{1}{p}) + \frac{1}{2}$.
- (2) Existuje $p \in (0, 100)$ s obsahem větším než 10 000?
- (3) Najděte p , pro nějž je obsah minimální.

Řešení.

- (1) **Primitivní funkce a dosazení mezí.** Obsah je $u(p) = \int_p^{p+1} (x + \frac{1}{x}) \, dx$; s primitivní funkcí $\frac{x^2}{2} + \ln x$:

$$u(p) = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_p^{p+1} = \frac{(p+1)^2 - p^2}{2} + \ln \frac{p+1}{p} = p + \frac{1}{2} + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

- (2) **Limita pro $p \rightarrow 0^+$.** Pro $p \rightarrow 0^+$ je $\ln(1 + \frac{1}{p}) \rightarrow +\infty$, takže $u(p) \rightarrow +\infty$; na dostatečně malém $p > 0$ (a tedy i v $(0, 100)$) obsah přesáhne libovolnou mez, speciálně 10 000.
- (3) **Derivace a kritický bod.** Řetězkové pravidlo na $\ln(1 + \frac{1}{p})$ dává

$$u'(p) = 1 + \frac{-1/p^2}{1 + 1/p} = 1 - \frac{1}{p^2 + p}.$$

Z $u'(p) = 0$ plyne $p^2 + p - 1 = 0$ s jediným kladným kořenem $p_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Konvexita. $u''(p) = \frac{2p+1}{(p^2+p)^2} > 0$, takže u je ryze konvexní a p_0 je bodem globálního minima:

$$p_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(Příklad pěkně spojuje integrál (obsah) s derivací (extrém).)

Odhady součtů řad. Vztah mezi integrálem a Riemannovými sumami dává odhady konečných i nekonečných součtů.

★ Věta – Odhad sumy integrálem a integrální kritérium

Je-li f neklesající na $[1, n]$, platí $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^n f(k)$ (pro nerostoucí f se nerovnosti obrátí). Důsledek pro nezápornou nerostoucí $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$: řada $\sum_{k \geq 1} f(k)$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f < +\infty$.

i Poznámka. Zápis $\int_1^\infty f := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f$ (pokud limita vpravo existuje) se nazývá *nevlastní integrál* – rozšiřuje integrál na neohrazený interval. V tomto tvaru ho používáme v kritériu výše i v příkladu níže.

💡 Intuice. Každý člen $f(k)$ je výška obdélníku o šířce 1; u monotónní f tyto obdélníky integrál $\int_1^n f$ sevrou zdola i shora podle toho, bereme-li jako výšku levý, či pravý krajní bod intervalu. Posláním $n \rightarrow \infty$ odtud plyne integrální kritérium: nezáporná nerostoucí řada konverguje právě tehdy, když konverguje příslušný nevlastní integrál.

🔧 Příklad – Harmonická čísla a divergence

Zadání. Pomocí odhadu sumy integrálem rozhodněte o konvergenci řad $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ a $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ (pro $s > 1$).

Řešení. Pro $f(x) = \frac{1}{x}$ dává odhad $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$, kde $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Protože $\ln n \rightarrow +\infty$, harmonická řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje. Naopak $\int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1} < \infty$ pro $s > 1$, takže $\sum \frac{1}{k^s}$ pro $s > 1$ konverguje.

Objemy a povrchy rotačních těles; délka křivky. Má-li f na $[a, b]$ spojitou derivaci a $f \geq 0$, pak pro těleso vzniklé rotací útvaru pod grafem kolem osy x platí

$$\text{objem} = \pi \int_a^b f(t)^2 dt, \quad \text{povrch} = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

a délka grafu (oblouku) funkce f je

$$\text{délka} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

💡 Intuice. Všechny tři vzorce vznikají „nasekáním“ útvaru na tenké plátky a sečtením (limitou) jejich příspěvků: objem jako součet tenkých válečků o poloměru $f(x)$ ($\pi f(x)^2 dx$), délka křivky jako součet maličkých přepon $\sqrt{1 + (f')^2} dx$ (Pythagoras na přírůstky dx a $f'(x) dx$).

🔧 Příklad – Objem koule

Zadání. Odvoďte integrálem vzorec pro objem koule o poloměru r .

Řešení.

Volba rotující funkce. Koule o poloměru r vznikne rotací horního půlkruhu pod grafem $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (horní půlkružnice o poloměru r) na $[-r, r]$ kolem osy x . Řez kolmý k ose x v bodě x je kruh o poloměru $f(x)$, tedy o obsahu $\pi f(x)^2$.

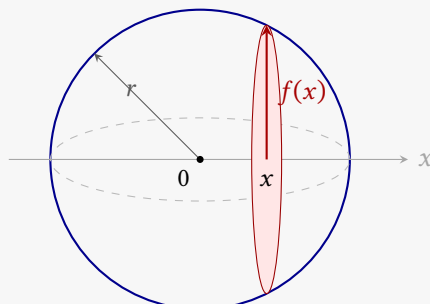
Integrace. Objem je součet (integrál) tenkých plátek o tloušťce dx :

$$V = \pi \int_{-r}^r f(x)^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r.$$

Druhá mocnina zrušila odmocninu a zbyl polynom (zde je r konstanta); jeho primitivní funkce je $r^2 x - \frac{x^3}{3}$.

Dosazení mezí. V horní $r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}r^3$, v dolní $r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3} = -r^3 + \frac{r^3}{3} = -\frac{2}{3}r^3$. Jejich rozdíl je $\frac{2}{3}r^3 - (-\frac{2}{3}r^3) = \frac{4}{3}r^3$, a tedy

$$V = \pi \cdot \frac{4}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$



Objem koule jako součet tenkých plátek: rotací půlkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x vznikne koule. Řez kolmý k ose v bodě x je kruh o poloměru $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, tj. s obsahem $\pi f(x)^2 = \pi(r^2 - x^2)$; sečteno integrálem na $[-r, r]$ dává $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

i Poznámka. Integrand $r^2 - x^2$ je *sudý*, takže šlo počítat zkratkou $V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$ (poloviční interval, dvojnásobek) a vyhnout se zápornému kraji. Rozměrová kontrola: výsledek vyšel úměrný r^3 , což je objem – koeficient $\frac{4}{3}\pi$ je bezrozměrný.

Shrnutí

i Poznámka. Klíčové vlastnosti a vzorce (přehled k SZZ). Stručný výčet klíčových definic, vět a vzorců okruhu M1.

Posloupnosti a limity.

- Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$. Vlastní limita $\Rightarrow$ konvergentní; nevlastní ($\pm\infty$) nebo neexistující $\Rightarrow$ divergentní.
- Konvergentní $\Rightarrow$ omezená (ne naopak: $(-1)^n$ je omezená, ale divergentní). Důkaz obměnou: pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 , poté $|a_n| \leq |L| + 1$; konečně mnoho prvních členů pokryje $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |L| + 1\}$.
- Monotónní posloupnost vždy má limitu (vlastní $\iff$ navíc omezená).
- Aritmetika limit: $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, $\lim(a_n b_n) = AB$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ – platí, je-li pravá strana definovaná (neurčité výrazy $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ vyloučeny). Omezená $\cdot$ nulová = 0.
- Věta o dvou policajtech: $a_n \leq c_n \leq b_n$ a $\lim a_n = \lim b_n = L \Rightarrow \lim c_n = L$.
- Limita a uspořádání: z $A < B$ plyne $a_n < b_n$ od jistého indexu; z $a_n \leq b_n$ pro vš. n plyne $A \leq B$ (ostrá nerovnost se v limitě může zkazit na neostrou).

Řady.

- Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: N -tý částečný součet $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$; konverguje $\iff \lim_{N \rightarrow \infty} s_N \in \mathbb{R}$.
- Nutná podmínka konvergence: $a_n \rightarrow 0$. Nestačí – harmonická $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverguje, přestože $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.
- Geometrická řada $\sum_{n \geq 0} q^n$: pro $|q| < 1$ součet $\frac{1}{1-q}$; pro $q \geq 1$ součet $+\infty$; pro $q \leq -1$ součet neexistuje. Mezivýsledek: $s_N = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}$ pro $q \neq 1$.
- p -série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$: konverguje pro $s > 1$, diverguje pro $s \leq 1$ (integrálním kritériem).

Limita funkce a spojitost.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Limita oboustranná $\iff$ obě jednostranné existují a rovnají se; totéž pro a , $A \in \mathbb{R}^*$ přes okolí $\pm\infty$.

- Heineho věta: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff$ pro každou $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, platí $f(x_n) \rightarrow A$. Hodí se k důkazu neexistence limity (stačí najít dvě posloupnosti s různými limitami $f(x_n)$, $f(y_n)$).
- Aritmetika limit, limita a uspořádání, věta o dvou policajtech: analogicky jako u posloupností.
- Limita složené funkce: $\lim_{x \rightarrow a} g = B$, $\lim_{y \rightarrow B} f = C$ a navíc (P1) f spojitá v B , nebo (P2) g na okol. a nenabývá hodnoty $B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = C$. (Bez P1/P2 může selhat.)
- Spojitost f v a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Nespojitost: limita neexistuje, nebo existuje, ale $\neq f(a)$. Pokud f v a není definována, o (ne)spojitosti nelze mluvit.
- Darbouxova věta: f spojitá na $[a, b] \Rightarrow$ nabývá každé hodnoty mezi $f(a)$ a $f(b)$ (zobrazuje interval na interval). Aplikace: metoda půlení intervalů pro kořeny.
- Princip maxima: f spojitá na kompaktním $[a, b] \Rightarrow$ nabývá svého maxima i minima. Uzavřenost nutná ($f(x) = x$ na $(0, 1)$ max ani min nemá).

Derivace a aplikace.

- Definice: $f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$. Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost (ne naopak: $|x|$ v 0).
- Pravidla: $(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(fg)' = f'g + fg'$ (Leibniz; u nevlastních derivací navíc f nebo g spojitá), $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (g spojitá, $g(b) \neq 0$); $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$ (řetízkové); $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ (inverze, $f'(x_0) \neq 0$).
- Základní derivace: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- l'Hospitalovo pravidlo: $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$ (pokud pravá strana existuje), platí pro neurčité výrazy $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. U jiných výrazů *nelze* použít; neexistence limity f'/g' nic neříká.
- Nutná podmínka lokálního extrému: $f'(a) = 0$ nebo derivace neexistuje (vč. krajních bodů). Monotonie: $f' > 0 \Rightarrow$ rostoucí, $f' < 0 \Rightarrow$ klesající, $f' \equiv 0 \Rightarrow$ konstantní.
- Konvexita: $f'' > 0 \Rightarrow$ ryze konvexní, $f'' < 0 \Rightarrow$ ryze konkávní; inflexní bod = změna konvexity.
- Rolleova věta: f spoj. na $[a, b]$, diff. na (a, b) , $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$. Lagrangeova: totéž bez podmínky $f(a) = f(b)$, $\exists c : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (tečna rovnoběžná se sečnou krajních bodů).
- Taylorův polynom řádu n v a : $T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$; jediný polynom stupně $\leq n$ s $f(x) - T_n = o(|x - a|^n)$ pro $x \rightarrow a$. Lagrangeův zbytek: $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$ pro nějaké c mezi a a x .
- Maclaurinovy rozvoje ($a = 0$): $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

Integrály a aplikace.

- Primitivní funkce F k f na I : $F'(x) = f(x)$ pro vš. $x \in I$. Dvě primitivní funkce k téže f na intervalu se liší o konstantu; každá spojitá funkce primitivní funkci má.
- Substitute: $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$ (řetízkové pravidlo pozpátku). U určitého integrálu přepočítat meze: $\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} f(x) dx$.
- Per partes: $\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx$ (Leibnizovo pravidlo pozpátku). Typické výsledky: $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + c$, $\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + c$.
- Newtonův integrál: $(N) \int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a)$ (nezávisí na volbě F).
- Riemannův integrál: $\sup$ dolních sum = $\inf$ horních sum (a obě konečné) $\Rightarrow f$ integrovatelná. Postačující podmínka: f spojitá nebo f monotónní na $[a, b]$.
- 1. základní věta analýzy: $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$ v bodech spojitosti f . 2. základní věta: pro $f \in R[a, b] \cap N(a, b)$ je Riemannův = Newtonův (pro spojitě f vždy).
- Obsah: plocha pod grafem $f \geq 0$ na $[a, b]$ je $\int_a^b f(x) dx$.
- Odhad sumy integrálem: f nerostoucí $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f \geq \sum_{k=2}^n f(k)$ (pro neklesající f nerovnosti opačně). Integrální kritérium: $f \geq 0$ nerostoucí $\Rightarrow \sum_{k \geq 1} f(k)$ konverguje $\iff \int_1^\infty f < \infty$.

- Rotační těleso (rotace $f \geq 0$ na $[a, b]$ kolem osy x): objem $V = \pi \int_a^b f(t)^2 dt$, povrch $S = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.
- Délka křivky (grafu f): $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

Zdroje

- V. Jelínek: *Matematická analýza 1*, kompletní zápisky z přednášky NMAI054, MFF UK, 2019/20 (primární zdroj výkladu).
<https://iuuk.mff.cuni.cz/~jelinek/1920/ma1.html>
- L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, M. Zelený: *Matematická analýza*, skripta (verze 2025-02-09).
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza-pro-studenty-2025-02-09.pdf>
- L. Pick: *Sbírka příkladů k MA I a II*.
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/sbirka.pdf>
- 3Blue1Brown: *Essence of Calculus* (video odkazovaná v textu).
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMYO3t5Yr>
- MFF UK: požadavky ke státní závěrečné zkoušce (Informatika, Bc.) a zadání otázek z minulých termínů.
<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>