

Příklady otázek – Algebra a lineární algebra

Reálné otázky ze SZZ 2022–2026 (M2)

Jakub Klesa

Pokryté předměty: NMAI057 (Lineární algebra 1), NMAI058 (Lineární algebra 2)

Obsah

1	Báze a ortogonální báze	1
2	Lineární zobrazení	2
3	Lineární algebra	3
4	Skalární součin	4
5	Báze vektorových prostorů	5
6	Matice	6
7	Skalární součin	7
8	Matice	8

Poznámka. Tento dokument obsahuje reálné otázky z minulých termínů SZZ (2022–2026) zařazené do okruhu M2. U otázek s obrázkem je grafika oříznutá z originálního PDF (viz odkaz na zdroj). Text, číselná data a tabulky jsou přepsané věrně. Zadání i oficiální náčrty řešení pocházejí ze sad zveřejněných na webu MFF UK:

<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>

Náčrty označené jako doplněné jsou vlastní, oficiální sada je k dané otázce neobsahuje.

1 Báze a ortogonální báze

(Reálná otázka: podzim 2022, č. 4 – Báze a ortogonální báze)

Zadání.

Uvažujme matici $A = BC$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte bázi sloupcového prostoru matice A .
2. Definujte pojem ortogonální báze.

3. Najděte ortogonální bázi sloupcového prostoru matice A .

Náčrt řešení.

1. Matice $A = BC$ je typu 5×5 , ale $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$. Platí totiž rovnost sloupcových prostorů $\text{col}(A) = \text{col}(B)$: každý sloupec A je tvaru $B \cdot (\text{sloupec } C)$, takže $\text{col}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^5\} = \{B(Cx) : x \in \mathbb{R}^5\}$. Protože C má plnou řádkovou hodnotu 2, je $\{Cx : x \in \mathbb{R}^5\} = \mathbb{R}^2$, a tedy $\text{col}(A) = \{By : y \in \mathbb{R}^2\} = \text{col}(B)$. Bázi proto tvoří dva (lineárně nezávislé) sloupce matice B :

$$b_1 = (1, 2, 1, 1, 1)^T, \quad b_2 = (3, 2, 2, 0, -1)^T.$$

2. *Ortogonální báze* prostoru (se skalárním součinem) je báze, jejíž každé dva různé vektory jsou na sebe kolmé, tj. mají nulový skalární součin.
3. Použijeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci na b_1, b_2 :

$$u_1 = b_1 = (1, 2, 1, 1, 1)^T, \quad \|u_1\|^2 = 8.$$

Dále $b_2 \cdot u_1 = 8$, takže

$$u_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = b_2 - \frac{8}{8} u_1 = b_2 - u_1 = (2, 0, 1, -1, -2)^T.$$

Kontrola: $u_1 \cdot u_2 = 0$. Hledaná ortogonální báze je tedy

$$\{(1, 2, 1, 1, 1)^T, (2, 0, 1, -1, -2)^T\}.$$

(V PDF bez náčrtu řešení; náčrt doplněn k výkladu okruhu, výpočet ověřen numericky.)

2 Lineární zobrazení

(Reálná otázka: jaro 2023, č. 3 – Lineární zobrazení)

Zadání.

1. Definujte matici lineárního zobrazení vzhledem k zadaným bázím.
2. Formulujte tvrzení o matici složeného zobrazení, tj. jak se matice lineárního zobrazení mění při skládání zobrazení.
3. Uvažme lineární zobrazení $g : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ splňující $f \circ g \circ h = \text{id}$, přičemž lineární zobrazení f a h jsou dána následovně:

$$f((1, 0)^T) = h((0, 1)^T) = (3, 4)^T,$$

$$f((0, 1)^T) = h((1, 0)^T) = (4, 1)^T.$$

Najděte matici g vzhledem ke kanonickým bázím.

Náčrt řešení.

(V originálním PDF bez náčrtu; doplněno vzorové řešení.)

1. *Matice lineárního zobrazení.* Buď $f : U \rightarrow V$ lineární, $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ báze U a B_V báze V . Maticí f vzhledem k bázím B_U, B_V (značíme ${}_V[f]_{B_U}$) rozumíme matici, jejíž j -tý sloupec tvoří souřadnice obrazu $[f(x_j)]_{B_V}$. Splňuje $[f(x)]_{B_V} = {}_V[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$.

2. *Matice složeného zobrazení.* Pro $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ a báze B_U, B_V, B_W platí

$${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}.$$

Skládání zobrazení tedy odpovídá násobení jejich matic.

3. Sloupce matice zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím jsou obrazy kanonických vektorů, takže (počítáme v tělese $\mathbb{Z}_5$)

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

kde $F_{*1} = f((1, 0)^T) = (3, 4)^T$, $F_{*2} = f((0, 1)^T) = (4, 1)^T$ a obdobně $H_{*1} = h((1, 0)^T) = (4, 1)^T$, $H_{*2} = h((0, 1)^T) = (3, 4)^T$. Z rovnosti $f \circ g \circ h = \text{id}$ plyne $FGH = I$, tedy $G = F^{-1}H^{-1}$.

Inverzi matice řádu 2 počítáme jako $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (\det)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (vše modulo 5):

- $\det F = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -13 \equiv 2$, $2^{-1} = 3$, takže $F^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $\det H = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 13 \equiv 3$, $3^{-1} = 2$, takže $H^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pak

$$G = F^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \pmod{5}.$$

Ověření: $FG = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $(FG)H = I$, takže $f \circ g \circ h = \text{id}$.

3 Lineární algebra

(Reálná otázka: léto 2023, č. 3 – Lineární algebra)

Zadání.

Uvažujme dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte vektor $x \in \mathbb{R}^2$ takový, aby vektory Ax , Bx byly na sebe kolmé (při standardním skalárním součinu).
2. Najděte matici lineárního zobrazení, které vektor Ax zobrazuje na vektor Bx pro libovolné $x \in \mathbb{R}^2$.
3. Rozhodněte, zda lineární zobrazení $x \mapsto B^{-1}A^3B^{-1}x$ plochy geometrických útvarů zvětšuje či zmenšuje.

Náčrt řešení.

(V originálním PDF bez náčrtu; doplněno vzorové řešení.)

1. Spočítáme $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)^T$ a $Bx = (x_2, x_1 + 2x_2)^T$. Jejich standardní skalární součin je

$$(Ax)^T(Bx) = (x_1 + 2x_2)x_2 + (x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2.$$

Vektory jsou kolmé právě tehdy, když $(x_1 + 2x_2)^2 = 0$, tj. $x_1 = -2x_2$. Hledané vektory jsou tedy $x = t(-2, 1)^T$, $t \in \mathbb{R}$ (např. $x = (-2, 1)^T$).

2. Hledáme matici M s $M(Ax) = Bx$ pro *všchna* x . Protože A je regulární ($\det A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0$), prochází Ax celé $\mathbb{R}^2$ a podmínka je ekvivalentní $MA = B$, odkud $M = BA^{-1}$. Z

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověření: $MA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

3. Faktor změny obsahu při zobrazení $x \mapsto Cx$ je $|\det C|$. Z multiplikativnosti determinantu

$$|\det(B^{-1}A^3B^{-1})| = \frac{|\det A|^3}{|\det B|^2}.$$

Zde $\det A = -1$ a $\det B = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1$, takže faktor je $\frac{1^3}{1^2} = 1$. Obsahy se tedy *nemění* (zobrazení je zachovává; protože $\det(B^{-1}A^3B^{-1}) = (-1)^3/(-1)^2 = -1 < 0$, mění jen orientaci).

4 Skalární součin

(Reálná otázka: jaro 2024, č. 3 – Skalární součin)

Zadání.

- Ověřte, že $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ je skalární součin na $\mathbb{R}^{m \times n}$, přičemž tzv. *stopa matice*, značená trace , je definována pro čtvercové matice řádu n předpisem $\text{trace}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$.
- Rozhodněte, zdali jsou matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ na sebe ortogonální vzhledem k uvedenému skalárnímu součinu pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 \\ -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

a matici $\mathbf{B}$, jejíž všechny prvky jsou rovny -13 .

- Zformulujte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost a rozhodněte, zda pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n platí: $(\text{trace}(\mathbf{A}))^2 \leq n \cdot \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$.

Náčrt řešení.

- Po dosazení

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}^T \mathbf{B})_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}^T)_{ij} b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji}.$$

Neboli po složkách mezi sebou vynásobíme matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a výsledek sečteme.

Toto zobrazení splňuje axiomy skalárního součinu:

- $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ji})^2 \geq 0$
- $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ji})^2 = 0 \Rightarrow \forall i, j : a_{ij} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

- $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{ji} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle$
- $\langle \mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ji} + c_{ji}) b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ji} b_{ji} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{C}, \mathbf{B} \rangle$
- $\langle t\mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t a_{ji} b_{ji} = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji} = t \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$

Také vyplývá z toho, že jde o standardní skalární součin, pokud reálné matice typu $m \times n$ reprezentujeme jako reálné vektory o mn složkách.

2. $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot (-13) = -13 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} = 0$, protože $\mathbf{A}$ má řádkové součty $-3, 3, -3$ a 3 .
3. Cauchyho–Schwarzova nerovnost: Pro každý vektorový prostor V se skalárním součinem a normou odvozenou z tohoto skalárního součinu platí: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Dotazovaná nerovnost platí, umocněním obou stran Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dostaneme $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Do této nerovnosti dosadíme uvedený skalární součin a vektory $\mathbf{u} = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{v} = \mathbf{A}$. Dostáváme: $(\text{trace}(\mathbf{A}))^2 = (\text{trace}(\mathbf{I}_n^T \mathbf{A}))^2 = \langle \mathbf{I}_n, \mathbf{A} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n \rangle \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = n \cdot \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): pro $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ typu $n \times n$, takže správně $\text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} b_{ji}$ (vnitřní součet jde přes m řádků, v náčrtu je horní mez n). Na závěru to nic nemění: jde o součet součinů odpovídajících prvků přes všech mn pozic. V bodě 2 se sčítá přes všech $4 \cdot 6 = 24$ prvků matice $\mathbf{A}$; řádkové součty jsou $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$, $-2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 3$ a dále se střídají, celkový součet je tedy 0.

5 Báze vektorových prostorů

(Reálná otázka: léto 2024, č. 3 – Báze vektorových prostorů)

Zadání.

1. Zformulujte Steinitzovu větu o výměně vhodných vektorů mezi lineárně nezávislou a generující množinou (čili nikoli nutně bázemi).
2. Mějme reálnou matici $\mathbf{A}$ takovou, že je podobná diagonální matici $\mathbf{D}$ prostřednictvím součinu $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}$, kde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -8 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

přičemž je známo, že prvky na diagonále $\mathbf{D}$ jsou čísla 17, 17, 23, 17, 23 v uvedeném pořadí.

Rozhodněte, zdali některý ze sloupců matice $\mathbf{R}$ lze vyměnit za následující vektor $\mathbf{u}_i$, aby matici $\mathbf{A}$ bylo stále možné diagonalizovat i prostřednictvím výsledné matice $\mathbf{R}'$.

Pokud taková výměna je možná, určete všechny sloupce matice $\mathbf{R}$, které mohou být vyměněny.

- (a) Řešte pro $\mathbf{u}_1 = (4, 2, 2, -3, -2)^T$.
- (b) Řešte pro $\mathbf{u}_2 = (7, -6, -2, 12, -6)^T$.

Své odpovědi zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. Necht B je konečná lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V a C generuje V . Pak existuje D taková, že: D generuje V , $B \subseteq D$, $|D| = |C|$ a $D \setminus B \subseteq C$.
2. Vzhledem k bázi B ze sloupců $\mathbf{R}$ jsou (spočteno řešením soustav):
 - (a) $[\mathbf{u}_1]_B = (0, 2, 0, -3, 0)^T$ tedy $\mathbf{u}_1$ lze vyměnit za 2. a 4. sloupec, ty odpovídají stejnému vlastnímu číslu 17, tedy se podprostor vlastních vektorů nezmění.
 - (b) $[\mathbf{u}_2]_B = (0, 1, 1, 0, -2)^T$ čili $\mathbf{u}_2$ neleží v ani jednom podprostoru vlastních vektorů, není tedy vlastním vektorem a proto výměnu provést nelze.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): $\mathbf{R}$ je regulární (její sloupce tvoří bázi), takže souřadnice $[\mathbf{u}_i]_B$ jsou jednoznačné. Podle diagonály $\mathbf{D}$ tvoří sloupce 1, 2, 4 bázi vlastního podprostoru čísla 17 a sloupce 3, 5 bázi vlastního podprostoru čísla 23. V (a) je $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{R}_{*2} - 3\mathbf{R}_{*4}$ kombinací vektorů z podprostoru čísla 17, takže je to vlastní vektor pro 17. Výměnou sloupce zůstane báze právě tehdy, když má $\mathbf{u}_1$ u vyměňovaného sloupce nenulovou souřadnici (jinak by $\mathbf{u}_1$ ležel v obalu zbylých sloupců a vznikl by lineárně závislý systém). Vyměnit lze tedy buď 2., nebo 4. sloupec (každý zvlášť), ne 1., 3. ani 5. V (b) je $\mathbf{u}_2 = \mathbf{R}_{*2} + \mathbf{R}_{*3} - 2\mathbf{R}_{*5}$, tedy $\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = 17\mathbf{R}_{*2} + 23\mathbf{R}_{*3} - 46\mathbf{R}_{*5}$. Kdyby $\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2$, porovnání souřadnic by dalo $\lambda = 17$ i $\lambda = 23$, což je spor.

6 Matice

(Reálná otázka: jaro 2025, č. 3 – Matice)

Zadání.

1. Najděte symetrickou matici $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ takovou, aby

$$\text{Ker}(S) = \text{span}\{(1, 5, 1)^T, (0, 2, 1)^T\}.$$

2. Definujte pojem *podobné matice* a stanovte, které z následujících veličin mají podobné matice stejné: hodnost, determinant, jádro.

3. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 3 a 1. Rozhodněte, zda existuje báze, vzhledem k níž má lineární zobrazení $f(x) = Ax$ matici v diagonálním tvaru.

Náčrt řešení.

1. Řádkový prostor matice je kolmý na jádro, čili je generován vektorem $(3, -1, 2)^T$. Ze symetrie pak matice musí mít tvar

$$S = \alpha(3, -1, 2)^T(3, -1, 2) = \alpha \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$.

2. Matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje regulární matice R taková, že $A = RBR^{-1}$. Podobné matice mají stejnou hodnost i determinant. Jádro ne, například pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Ne, neexistuje. Vlastní číslo 1 je dvojnásobné, ale přísluší mu jen jeden vlastní vektor, neboť $\text{rank}(A - I_3) = 2$. Tudíž matice nelze diagonalizovat.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): (1) Vektor kolmý na oba generátory jádra dá vektorový součin $(1, 5, 1) \times (0, 2, 1) = (5 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 5 \cdot 0) = (3, -1, 2)$. Jádro má dimenzi 2, takže $\text{rank}(S) = 3 - 2 = 1$. Řádkový prostor je kolmý na jádro ($\text{Ker}(S) = R(S)^\perp$), takže každý řádek S je násobkem $(3, -1, 2)$; ze symetrie totéž platí pro sloupce. Proto $S = \alpha vv^T$ s $v = (3, -1, 2)^T$ a $\alpha \neq 0$. Zkouška: $v^T(1, 5, 1)^T = 3 - 5 + 2 = 0$ a $v^T(0, 2, 1)^T = -2 + 2 = 0$. (3) Že je právě číslo 1 dvojnásobné, plyne ze stopy: $\text{trace}(A) = 2 - 1 + 4 = 5 = 3 + 1 + \lambda_3$, tedy $\lambda_3 = 1$. Matice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ má 1. a 3. řádek stejný, takže $\text{rank}(A - I_3) = 2$ a geometrická násobnost čísla 1 je $3 - 2 = 1$, menší než algebraická 2.

7 Skalární součin

(Reálná otázka: léto 2025, č. 3 – Skalární součin)

Zadání.

Uvažujme zobrazení ve tvaru $\langle x, y \rangle = x^T A y$ pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Rozhodněte o platnosti výroků:

- (a) Je-li $\langle x, y \rangle = x^T A y$ skalární součin na $\mathbb{R}^n$, pak $\det(A) > 0$.
- (b) Je-li $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická regulární matice, pak $\langle x, y \rangle = x^T B^2 y$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

2. Uvažujme skalární součin na $\mathbb{R}^n$ zadaný ve tvaru $\langle x, y \rangle = x^T A y$ pro nějakou vhodnou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zapište Cauchyho–Schwarzovu nerovnost tak, aby místo normy a skalárního součinu byly použity maticové a aritmetické operace.

3. Rozhodněte, zda pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

(tj. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s prvky $a_{i,j} = \min(i, j)$) je pozitivně definitní. Formulujte příslušné kritérium a ověřte ho, případně ukažte protipříklad.

Náčrt řešení.

- 1. (a) Ano, matice je pozitivně definitní, má tedy kladná vlastní čísla i determinant.
- (b) Ano, B^2 je symetrická s kladnými vlastními čísly, tedy pozitivně definitní.
- 2. Cauchyho–Schwarzova nerovnost: Pro každé $x, y \in V$ platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

V našem případě má nerovnost tvar

$$|x^T A y| \leq \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}.$$

3. Ano, matice A je pozitivně definitní. Například Choleského rozklad má tvar $A = LL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno lze ověřit i Gaussovou eliminací nebo Sylvestrovým kritériem.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): (1b) Protože B je symetrická, je $B^2 = B^T B$ symetrická a její vlastní čísla jsou λ^2 pro vlastní čísla λ matice B ; regulární B nemá vlastní číslo 0, takže $\lambda^2 > 0$. Přímo: $x^T B^2 x = \|Bx\|^2 > 0$ pro $x \neq 0$. (3) Pro dolní trojúhelníkovou L se samými jedničkami na diagonále i pod ní je $(LL^T)_{ij} = \sum_k L_{ik} L_{jk}$ počet indexů k s $k \leq i$ a $k \leq j$, tedy $\min(i, j) = a_{ij}$. L má kladnou diagonálu, takže jde o Choleského rozklad a A je pozitivně definitní pro každé n .

8 Matice

(Reálná otázka: jaro 2026, č. 3 – Matice)

Zadání.

Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, jejíž řádkový prostor má bázi tvořenou pouze vektorem $(1, 2, 3)^T$.

1. Najděte odstupňovaný tvar matice A .
2. Napište definici determinantu a spočítejte konkrétní hodnotu $\det(A)$.
3. Najděte ortogonální bázi jádra matice A .

Náčrt řešení.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}.$$

V našem případě má matice A hodnotu 1, čili je singulární a $\det(A) = 0$.

3. Jádro matice A má dimenzi 2 a bázi tvoří např. vektory $(2, -1, 0)^T$, $(3, 0, -1)^T$. Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací dostaneme ortogonální bázi $(2, -1, 0)^T$, $(3, 6, -5)^T$.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu): (1) Všechny řádky A jsou násobky $(1, 2, 3)$ a aspoň jeden je nenulový; eliminací (a vydělením pivotu) zbude jediný nenulový řádek $(1, 2, 3)$. (3) Jádro je množina x s $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ (dimenze $3 - 1 = 2$). Gram–Schmidt na $v_1 = (2, -1, 0)^T$, $v_2 = (3, 0, -1)^T$: $\langle v_2, v_1 \rangle = 6$, $\langle v_1, v_1 \rangle = 5$, takže $v_2 - \frac{6}{5}v_1 = \frac{1}{5}(3, 6, -5)^T$; po vynásobení pěti dostaneme $(3, 6, -5)^T$. Zkouška: $(2, -1, 0) \cdot (3, 6, -5) = 0$ a $3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-5) = 0$, vektor tedy leží v jádře.