

Algebra a lineární algebra

Studijní materiál ke státnicím (M2)

Jakub Klesa

Pokryté předměty: NMAI057 (Lineární algebra 1), NMAI058 (Lineární algebra 2)

Obsah

Úvod	2
1 Algebraické struktury (grupy, tělesa, konečná tělesa)	2
1.1 Grupy a permutace	2
1.2 Tělesa a konečná tělesa	3
2 Soustavy lineárních rovnic (Gaussova eliminace)	4
3 Matice (operace, hodnost, inverzní matice)	6
3.1 Operace a typy matic	6
3.2 Regulární a inverzní matice	6
4 Vektorové prostory (báze, dimenze, podprostory)	7
4.1 Vektorový prostor, podprostor, lineární obal	7
4.2 Lineární nezávislost, Steinitzova věta, báze a dimenze	8
4.3 Maticové prostory	8
5 Lineární zobrazení (matice, obraz, jádro, izomorfismus)	9
5.1 Definice, obraz a jádro	9
5.2 Maticová reprezentace a skládání	9
5.3 Izomorfismus	11
6 Skalární součin (norma, ortogonalizace, projekce)	12
6.1 Skalární součin, norma a nerovnosti	12
6.2 Ortonormální báze, Fourierovy koeficienty, Gram–Schmidt	12
6.3 Ortogonální doplněk a projekce	14
6.4 Ortogonální matice	14
7 Determinanty (Laplaceův rozvoj, geometrie)	15
7.1 Definice a základní vlastnosti	15
7.2 Geometrická interpretace	16
8 Vlastní čísla a vektory (diagonalizace, spektrální rozklad)	18
8.1 Vlastní čísla a charakteristický polynom	18
8.2 Podobnost a diagonalizovatelnost	19
8.3 Symetrické matice	19
9 Pozitivně (semi)definitní matice (Choleského rozklad)	21
Shrnutí	22

Úvod

Tento materiál pokrývá okruh **M2 – Algebra a lineární algebra** (předměty NMAI057 a NMAI058, Lineární algebra 1 a 2). Výklad je postaven primárně na učebnici doc. Milana Hladíka *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*, podle níž se kurz vyučuje; značení a hloubka odpovídají kurzu pro informatiky (tedy ne rigor matematických oborů). Důraz a rozsah jsme porovnali s *Podrobným minimálním syllabem přednášek Lineární algebra I a II pro informatiky* (J. Matoušek).

Věty uvádíme *se zněním*, doplněné intuicí a krátkými odvozeními tam, kde pomáhají pochopení; rozsáhlé formální důkazy vynecháváme. Do výkladu jsou zařazeny řešené reálné otázky SZZ z let 2022–2026; všechny otázky k okruhu jsou pohromadě v samostatném dokumentu *Příklady otázek*. Použité zdroje jsou uvedeny na konci.

Značení. Tělesa značíme T , nejčastěji $\mathbb{R}$ (reálná čísla), $\mathbb{C}$ (komplexní), $\mathbb{Z}_p$ (zbytkové třídy modulo prvočíslo). Matice značíme velkými písmeny, $A \in T^{m \times n}$, prvek na pozici (i, j) je a_{ij} nebo A_{ij} ; A_{i*} je i -tý řádek, A_{*j} je j -tý sloupec. Vektory jsou malá písmena, standardně sloupcové, $x \in T^n$; e_i je i -tý jednotkový vektor, I_n jednotková matice řádu n , o nulový vektor. Transpozice je A^T , inverze A^{-1} , hodnost $\text{rank}(A)$.

 **Video:** 3Blue1Brown – Essence of Linear Algebra (celá série dává vizuální intuici k vektorům, lineárním zobrazům, determinantu a vlastním vektorům; odkazujeme na konkrétní díly u jednotlivých témat).

1 Algebraické struktury (grupy, tělesa, konečná tělesa)

Lineární algebra pracuje s vektory, které umíme sčítat a násobit skalárem. „Skaláry“ berou z nějakého tělesa a samotné sčítání tvoří strukturu zvanou grupa. Než tedy zavedeme vektorové prostory, popíšeme tyto dvě algebraické struktury. Obě se definují *axiomaticky*: vyjmenujeme vlastnosti, které mají operace splňovat, a strukturou pak je cokoli, co je splňuje. Výhoda je, že vše, co z axiomů odvodíme, platí naráz pro všechny konkrétní případy.

1.1 Grupy a permutace

Definice – Grupa

Grupa je dvojice $(G, \circ)$, kde G je množina a $\circ : G \times G \rightarrow G$ binární operace splňující

- (1) $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (asociativita),
- (2) $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$ (existence neutrálního prvku),
- (3) $\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e$ (existence inverzního prvku).

Grupa je *Abelova* (komutativní), splňuje-li navíc $a \circ b = b \circ a$ pro všechna $a, b \in G$.

 **Intuice.** V definici je skrytá podmínka *uzavřenosti*: výsledek $a \circ b$ nesmí „vypadnout“ z G . Píšeme-li operaci jako sčítání, neutrální prvek značíme 0 a inverzní $-a$; píšeme-li ji jako násobení, neutrální prvek je 1 a inverzní a^{-1} .

Příklad – Grupy a negrupy

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ a $(\mathbb{Z}_n, +)$ (sčítání modulo n) jsou Abelovy grupy. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa (nulu musíme vynechat, nemá inverzi). Neabelovské příklady: regulární matice řádu n s násobením, nebo permutace s skládáním. Naopak $(\mathbb{N}, +)$ grupa není (chybí inverzní prvky).

Definice – Podgrupa

$(H, \circ)$ je *podgrupa* grupy $(G, \circ)$, pokud $H \subseteq G$ a H se stejnou operací sama tvoří grupu; tj. H obsahuje e , je uzavřená na $\circ$ a na inverze. Značíme $(H, \circ) \leq (G, \circ)$.

★ Věta – Základní vlastnosti grupy

V každé grupě $(G, \circ)$ platí:

- neutrální prvek je jediný a ke každému prvku existuje jediný inverzní;
- *krácení*: $a \circ c = b \circ c \Rightarrow a = b$;
- rovnice $a \circ x = b$ má právě jedno řešení;
- $(a^{-1})^{-1} = a$ a $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Důležitým příkladem neabelovské grupy jsou permutace.

Definice – Permutace a její znaménko

Permutace na množině $\{1, \dots, n\}$ je bijekce $p : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$; množinu všech takových permutací značíme S_n . Permutaci lze rozložit na disjunktní *cykly*. *Transpozice* (i, j) je permutace s jediným netriviálním cyklem délky 2. Skládá-li se p z k cyklů (včetně jednoprvkových), je její *znaménko* $\text{sgn}(p) = (-1)^{n-k}$.

i Poznámka. Znaménko je vždy ± 1 ; permutace se znaménkem $+1$ jsou *sudé*, se znaménkem -1 *liché*. Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic a platí $\text{sgn}(p) = (-1)^r$, kde r je počet transpozic v rozkladu (jejich *parita* je jednoznačná, počet ne). Klíčová vlastnost pro determinanty: $\text{sgn}(p \circ q) = \text{sgn}(p) \text{sgn}(q)$. Množina $(S_n, \circ)$ tvoří tzv. *symetrickou grupu*, pro $n \geq 3$ nekomutativní.

1.2 Tělesa a konečná tělesa

Zatímco grupa má jednu operaci, těleso má dvě (sčítání a násobení) jako například $\mathbb{R}$. Díky tělesu můžeme s maticemi a soustavami pracovat i nad jinými obory než reálnými čísly.

Definice – Těleso

Těleso je množina T se dvěma komutativními binárními operacemi $+$ a $\cdot$ takovými, že

- (1) $(T, +)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 0 , inverzní $-a$),
- (2) $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 1 , inverzní a^{-1}),
- (3) $\forall a, b, c \in T : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita).

💡 Intuice. Těleso je obor, ve kterém lze „počítat jako s čísly“: sčítat, odčítat, násobit a dělit nenulovými prvky. Každé těleso má aspoň dva prvky ($0 \neq 1$). $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jsou tělesa; $\mathbb{Z}$ těleso není (chybí inverze k násobení, např. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$). Z axiomů plyne $0a = 0$ a „nulovost součinu“: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ nebo $b = 0$.

Příklad – Konečné těleso $\mathbb{Z}_n$

Na množině $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ definujeme $+$ a $\cdot$ modulo n . $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ jsou tělesa, ale $\mathbb{Z}_4$ není (prvek 2 nemá inverzi).

★ Věta – Kdy je $\mathbb{Z}_n$ těleso

$\mathbb{Z}_n$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Intuice. Je-li $n = pq$ složené ($1 < p, q < n$), pak $p \cdot q = 0$ v $\mathbb{Z}_n$, ač $p, q \neq 0$ – to porušuje nulovost součinu, kterou každé těleso splňuje. Pro prvočíslo n naopak inverze vždy existuje: násobky $\{0a, 1a, \dots, (n-1)a\}$ nenulového a proběhnou všechny zbytky, takže mezi nimi je i $1 = ba$, a tedy $b = a^{-1}$.

Poznámka. [Velikost konečných těles a charakteristika] Konečná tělesa existují právě o velikostech p^n , kde p je prvočíslo a $n \geq 1$; značí se $GF(p^n)$ (Galoisovo těleso) a každé dvě téže velikosti jsou isomorfní. Charakteristika tělesa je nejmenší n s $\underbrace{1 + \dots + 1}_n = 0$ (a 0, pokud takové n neexistuje); je buď nula (jako u $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), nebo prvočíslo (u $\mathbb{Z}_p$ je rovna p). Pro informatiku je klíčové $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$: sčítání odpovídá XOR, násobení AND.

Příklad – Inverze v $\mathbb{Z}_5$ a malá Fermatova věta

V $\mathbb{Z}_5$ jsou inverze pro násobení: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 3$ (neboť $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1$), $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$. Malá Fermatova věta: pro prvočíslo p a $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$ platí $a^{p-1} = 1$. Příklad: 2^{111} v $\mathbb{Z}_{11}$. Protože $2^{10} = 1$, je $2^{110} = 1$, takže $2^{111} = 2^{110} \cdot 2 = 2$.

Příklad – Znaménko permutace a kdy je $\mathbb{Z}_n$ těleso

- (a) Permutace $p \in S_5$ daná rozkladem na cykly $p = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$ má dva cykly (délek 3 a 2), tedy $\text{sgn}(p) = (-1)^{5-2} = -1$ – je lichá. Totéž z rozkladu na transpozice: $(1\ 3\ 2) = (1\ 3)(3\ 2)$ a $(4\ 5)$ dají dohromady 3 transpozice, $\text{sgn}(p) = (-1)^3 = -1$.
- (b) $\mathbb{Z}_5$ je těleso (5 je prvočíslo). $\mathbb{Z}_6$ těleso není: $6 = 2 \cdot 3$ je složené a v $\mathbb{Z}_6$ platí $2 \cdot 3 = 0$, ačkoli $2, 3 \neq 0$ – to porušuje nulovost součinu (a prvek 2 nemá inverzi).

2 Soustavy lineárních rovnic (Gaussova eliminace)

Soustavy lineárních rovnic jsou základní úlohou; zapisujeme je maticově a řešíme elementárními úpravami.

Definice – Soustava a její matice

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem T je

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \quad \dots, \quad a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

maticově $Ax = b$, kde $A \in T^{m \times n}$ je matice soustavy, $b \in T^m$ vektor pravých stran. Rozšířená matice soustavy je $(A \mid b)$. Řešením je každý vektor $x \in T^n$ vyhovující všem rovnicím.

Definice – Elementární řádkové úpravy (ERÚ)

ERÚ matice jsou:

- (1) vynásobení řádku nenulovým skalárem α ;
- (2) přičtení α -násobku jednoho řádku k jinému;
- (3) výměna dvou řádků.

★ Věta – ERÚ zachovávají množinu řešení

Provedeme-li na rozšířené matici $(A \mid b)$ elementární řádkovou úpravu, množina řešení soustavy se nezmění.

Intuice. Každá ERÚ má svou inverzní úpravu, takže žádné řešení nepřibude ani neubude. Řádky odpovídají rovnicím; sčítání a škálování rovnic je legální, protože nemění jejich řešení.

Definice – Odstupňovaný tvar a hodnost

Matice je v *řádkově odstupňovaném tvaru* (REF), pokud nenulové řádky předcházejí nulovým a pozice prvních nenulových prvků (*pivotů*) v řádcích ostře rostou shora dolů. *Hodnost* $\text{rank}(A)$ je počet nenulových řádků (pivotů) po převodu do REF. Sloupce s pivotem jsou *bázické*, ostatní *nebázické*.

Poznámka. REF tvar není jednoznačný, ale pozice pivotů ano, takže hodnost je dobře definovaná. Každou matici lze do REF převést Gaussovou eliminací (dopřednou eliminací nul pod pivoty).

★ Věta – Gaussova eliminace – řešitelnost (Frobeniova věta)

Převědeme $(A \mid b)$ na REF tvar $(A' \mid b')$. Pak:

- soustava *nemá řešení* právě tehdy, když $\text{rank}(A) < \text{rank}(A \mid b)$ (pivot v posledním sloupci);
- má *právě jedno řešení*, je-li $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b) = n$;
- má *více než jedno řešení*, je-li $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b) = r < n$ (nad nekonečným tělesem jako $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho, nad $\mathbb{Z}_p$ právě p^{n-r}); množinu řešení popíšeme parametricky, kde $n - r$ nebázických (volných) proměnných tvoří parametry a bázické dopočítáme *zpětnou substitucí*. Číslo $n - r$ je dimenze množiny řešení.

Poznámka. [Gaussova–Jordanova eliminace] *Redukovaný* odstupňovaný tvar (RREF) má navíc na pivotech jedničky a nad pivoty nuly. Gaussova–Jordanova eliminace převádí matici do RREF a řešení z ní lze odečíst přímo, bez zpětné substituce.

Příklad – Soustava s nekonečně mnoha řešeními

Zadání. Vyřešte soustavu s rozšířenou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Převodem na odstupňovaný (REF) tvar dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice i rozšířené matice je $3 < 4$, soustava má tedy $4 - 3 = 1$ -parametrickou množinu řešení. Pivoty jsou ve sloupcích 1, 2, 4; volná je x_3 . Zpětnou substitucí $x_4 = 1$, $x_2 = 2 - 2x_3$, $x_1 = -4 + \frac{5}{2}x_3$, takže

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4, 2, 0, 1) + x_3 \left(\frac{5}{2}, -2, 1, 0 \right), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Význam zápisu (partikulární řešení + obecné řešení homogenní soustavy) vyplývá ze sekce o vektorových prostorech.

3 Matice (operace, hodnost, inverzní matice)

3.1 Operace a typy matic

Definice – Operace s maticemi

Pro A, B téhož typu a skalár α : $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ a $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$. Součin AB matic $A \in T^{m \times p}$, $B \in T^{p \times n}$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ (skalární součin i -tého řádku A a j -tého sloupce B). Transpozice A^T má $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

i Poznámka. [Vlastnosti] Sčítání je komutativní a asociativní. Součin je asociativní a distributivní, $I_m A = A I_n = A$, ale **není komutativní** (obecně $AB \neq BA$). Dále $(AB)^T = B^T A^T$ a $(A + B)^T = A^T + B^T$. Matice A je *symetrická*, je-li $A = A^T$; pro libovolnou B je $B^T B$ symetrická. *Stopa* čtvercové matice je součet jejích diagonálních prvků, $\text{trace}(A) = \sum_i a_{ii}$; platí $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$ a $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ (a $\text{trace}(A) = \sum_i \lambda_i$, viz sekci o vlastních číslech).

💡 Intuice. Násobení matic odpovídá *skládání zobrazení*: díváme-li se na A jako na zobrazení $x \mapsto Ax$, pak $B(Ax) = (BA)x$. Proto je součin asociativní (skládání zobrazení je vždy asociativní) a nekomutativní (na pořadí transformací záleží). To je i historický důvod, proč se součin definuje právě takto.

i Poznámka. [Speciální matice] *Diagonální* matice má nuly mimo diagonálu, $\text{diag}(v_1, \dots, v_n)$. *Horní trojúhelníková* má nuly pod diagonálou (každá REF matice je horní trojúhelníková). Matice *hodnosti 1* jsou právě matice tvaru xy^T pro nenulové x, y (každý řádek je násobkem y^T).

3.2 Regulární a inverzní matice

Definice – Regulární matice

Čtvercová $A \in T^{n \times n}$ je *regulární*, má-li homogenní soustava $Ax = 0$ jediné řešení $x = 0$; jinak je *singulární*.

★ Věta – Charakterizace regularity

Pro $A \in T^{n \times n}$ jsou ekvivalentní:

- (1) A je regulární;
- (2) $\text{RREF}(A) = I_n$;
- (3) $\text{rank}(A) = n$;
- (4) pro každé b má soustava $Ax = b$ právě jedno řešení.

Definice – Inverzní matice

A^{-1} je *inverzní* k $A \in T^{n \times n}$, pokud $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

★ Věta – Existence a výpočet inverze

Matice A má inverzi právě tehdy, když je regulární, a pak je inverze jediná. Spočítáme ji převodem $(A \mid I_n)$ Gaussovou–Jordanovou eliminací: je-li $\text{RREF}(A \mid I_n) = (I_n \mid B)$, pak $B = A^{-1}$ (netvoří-li levá část I_n , je A singulární). Platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Intuice. j -tý sloupec A^{-1} je řešením soustavy $Ax = e_j$. Všechny tyto soustavy mají stejnou matici A , proto je řešíme naráz s pravou stranou I_n . K řešení soustavy $Ax = b$ pak stačí $x = A^{-1}b$ (v praxi se ale řeší rovnou Gaussovou eliminací, je to levnější).

Příklad – Výpočet inverze

Zadání. Najděte inverzi matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení. Úpravou $(A \mid I_3)$ Gaussovou–Jordanovou eliminací na tvar $(I_3 \mid A^{-1})$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9.5 & -4 & 3.5 \\ 1.5 & 1 & -0.5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ověření: $AA^{-1} = I_3$.

4 Vektorové prostory (báze, dimenze, podprostory)

4.1 Vektorový prostor, podprostor, lineární obal

Definice – Vektorový prostor

Vektorový prostor nad tělesem T je množina V s operacemi sčítání $+$: $V \times V \rightarrow V$ a násobení skalárem $\cdot$: $T \times V \rightarrow V$ takovými, že $(V, +)$ je Abelova grupa (nulový vektor o) a pro všechna $\alpha, \beta \in T$ a $u, v \in V$ platí:

- (1) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (asociativita násobení skalárem),
- (2) $1v = v$ (jednotkový skalár),
- (3) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributivita vůči sčítání skalárů),
- (4) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributivita vůči sčítání vektorů).

Příklad –

Aritmetický prostor T^n , prostor matic $T^{m \times n}$, prostor polynomů $\mathcal{P}^n$ stupně nejvýše n (dimenze $n + 1$), prostor všech polynomů $\mathcal{P}$ či spojitých funkcí $\mathcal{C}$ (nekonečné dimenze).

 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 16 – Abstract vector spaces (vektorový prostor abstraktně přes axiomy: polynomy, funkce i matice jako „vektory“).

Definice – Podprostor

$U \subseteq V$ je *podprostor*, tvoří-li sám vektorový prostor se stejnými operacemi. Ekvivalentně: $o \in U$, a U je uzavřená na součty a na násobky skalárem.

Definice – Lineární kombinace, obal, generátory

Lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ je výraz $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ s $\alpha_i \in T$. Lineární obal $\text{span}(W)$ je nejmenší podprostor obsahující W ; pro konečné $W = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $\text{span}(W) = \{\sum \alpha_i v_i\}$ (všechny lineární kombinace). Generuje-li W prostor U (tj. $\text{span}(W) = U$), říkáme, že W je *systém generátorů* U .

Intuice. Řešit soustavu $Ax = b$ znamená vyjádřit b jako lineární kombinaci sloupců A (s koeficienty x_j). Soustava je tedy řešitelná právě tehdy, když $b \in \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$.

4.2 Lineární nezávislost, Steinitzova věta, báze a dimenze

Definice – Lineární nezávislost

Vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Jinak jsou *lineárně závislé* (existuje netriviální kombinace dávající 0).

Intuice. Vektory jsou závislé právě tehdy, když některý lze vyjádřit jako kombinaci ostatních, tj. je „nadbytečný“ – jeho odebráním se lineární obal nezmenší. U nezávislého systému je každý vektor podstatný.

★ Věta – Steinitzova věta o výměně

Buď $x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V a $y_1, \dots, y_n$ systém generátorů V . Pak

- (1) $m \leq n$;
- (2) existují navzájem různé indexy $k_1, \dots, k_{n-m}$ tak, že $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$ je systém generátorů V .

Intuice. Lineárně nezávislých vektorů nemůže být víc než generátorů, a každý nezávislý systém lze „doplnit“ vhodnými generátory na systém generátorů (vyměníme m generátorů za naše nezávislé vektory). To je technické jádro celé teorie dimenze.

Definice – Báze, dimenze, souřadnice

Báze V je lineárně nezávislý systém generátorů. Vzhledem k bázi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ má každý $u \in V$ *jednoznačné* vyjádření $u = \sum \alpha_i v_i$; vektor *souřadnic* je $[u]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. *Dimenze* $\dim V$ je velikost (libovolné) báze.

★ Věta – O bázi a dimenzi

Každý (konečně generovaný) prostor má bázi a všechny jeho báze jsou stejně velké, takže dimenze je dobře definovaná. Každý lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi. Je-li $\dim V = d$, pak každý lineárně nezávislý systém má $\leq d$ prvků (a má-li jich d , je bází) a každý systém generátorů má $\geq d$ prvků (a má-li jich d , je bází).

Video: 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 2 – Linear combinations, span, and basis vectors (lineární kombinace, obal a báze).

4.3 Maticové prostory

Definice – Maticové prostory

Pro $A \in T^{m \times n}$ definujeme *sloupcový prostor* $S(A) = \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} \subseteq T^m$, *řádkový prostor* $R(A) = S(A^T) \subseteq T^n$ a *jádro* $\text{Ker}(A) = \{x \in T^n; Ax = 0\} \subseteq T^n$.

★ Věta – Hodnost a báze maticových prostorů

Buď A^R tvar RREF matice A s pivoty ve sloupcích $p_1, \dots, p_r$, $r = \text{rank}(A)$. Pak nenulové řádky A^R tvoří bázi $R(A)$, sloupce $A_{*p_1}, \dots, A_{*p_r}$ *původní* matice tvoří bázi $S(A)$, a $\dim R(A) = \dim S(A) = r$. Speciálně $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

★ Věta – O dimenzi jádra a hodnoti

Pro každou $A \in T^{m \times n}$ platí

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = n.$$

💡 **Intuice.** Zobrazení $x \mapsto Ax$ posílá n -rozměrný prostor na $r = \text{rank}(A)$ -rozměrný sloupcový prostor. „Deficit“ $n - r$ je přesně rozměr jádra – směrů, které se zhroutí do nuly. Pro regulární matici je jádro triviální a zobrazení je bijekce.

▶ **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 7 – Inverse matrices, column space and null space (inverze, sloupcový prostor a jádro).

🖋️ Příklad – Báze, dimenze a jádro pomocí RREF

Pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je $\text{rank}(A) = 2$, tedy $\dim \text{Ker}(A) = 4 - 2 = 2$. Bázi jádra najdeme dosazením jednotek za volné proměnné x_3, x_4 : $(6, -4, 1, 0)^T$ a $(4, -3, 0, 1)^T$.

5 Lineární zobrazení (matice, obraz, jádro, izomorfismus)

5.1 Definice, obraz a jádro

📖 Definice – Lineární zobrazení

Zobrazení $f : U \rightarrow V$ mezi prostory nad T je *lineární* (homomorfismus), pokud $f(x+y) = f(x)+f(y)$ a $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pro všechna $x, y \in U, \alpha \in T$.

📖 Definice – Obraz a jádro

Obraz $f(U) = \{f(x); x \in U\} \subseteq V$ a jádro $\text{Ker}(f) = \{x \in U; f(x) = o\} \subseteq U$.

★ Věta – Prosté zobrazení

Lineární $f : U \rightarrow V$ je prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{o\}$; ekvivalentně právě tehdy, když obraz každé lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislý.

★ Věta – O dimenzi jádra a obrazu

Pro lineární $f : U \rightarrow V$ platí $\dim U = \dim \text{Ker}(f) + \dim f(U)$.

5.2 Maticová reprezentace a skládání

★ Věta – Jednoznačnost dle obrazů báze

Buď $x_1, \dots, x_n$ báze U . Pak pro libovolné $y_1, \dots, y_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení f s $f(x_i) = y_i$. Lineární zobrazení je tedy plně určeno tím, kam pošle bázi.

💡 Intuice. Tohle je srdce celé kapitoly. Lineární zobrazení n -rozměrného prostoru je úplně určené n údaji – obrazy báзовých vektorů. Jakmile vím, kam letí $x_1, \dots, x_n$, dopočítám obraz *čehokoli*: každý x je nějaká kombinace báze a f tu kombinaci jen „zopakuje“ na obrazech (to je přesně předchozí intuice o linearitě). Místo nekonečně mnoha hodnot $f(x)$ si tak stačí pamatovat pár šipek – a ty zapíšeme do matice.

📖 Definice – Matice lineárního zobrazení

Buď $f : U \rightarrow V$, $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ báze U , B_V báze V . Matice f vzhledem k bázím B_U, B_V , značená ${}_{B_V}[f]_{B_U}$, má v j -tém sloupci souřadnice $[f(x_j)]_{B_V}$. (Čteme: dolní index vlevo je cílová báze B_V , vpravo zdrojová B_U ; vstupem jsou souřadnice vůči B_U , výstupem vůči B_V .)

💡 Intuice. Matice zobrazení není nic tajemného – je to „tabulka, kam letí báзовé vektory“. Do j -tého sloupce napíšeme, kam se zobrazí j -tý báзовý vektor (vyjádřeno v souřadnicích cílové báze). Mantra, ze které matici postavíš vždycky: **sloupec = obrazy báзовých vektorů**. V kanonické bázi je to obzvlášť snadné, protože souřadnice vektoru jsou ten vektor, takže sloupce jsou rovnou $f(e_1), \dots, f(e_n)$ – přesně jak to děláme v příkladu níže. V jiné bázi musíme každý obraz nejdřív přepsat do souřadnic cílové báze (malá soustava navíc), princip „sloupec = obraz báze“ ale zůstává.

★ Věta – Maticová reprezentace

Pro každé $x \in U$ platí $[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$. Speciálně každé lineární $f : T^n \rightarrow T^m$ je tvaru $f(x) = Ax$ pro $A = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$ se sloupci $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

💡 Intuice. Klíčový fakt o násobení maticí: součin $A[x]_{B_U}$ je *vážený součet sloupců* matice – první sloupec vezmu tolikrát, kolik je první souřadnice x , druhý podle druhé souřadnice atd., a sečtu. Třeba $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \end{pmatrix}$. Proč to dá zrovna $f(x)$? Sloupce jsou obrazy báзовých vektorů a souřadnice $x_1, \dots, x_n$ jsou „recept“, jak z báze složit x (tedy $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$). Násobení maticí proto poskládá *obrazy* báze ve stejném poměru, v jakém se z báze skládal vstup – a to je díky linearitě přesně $f(x) = x_1 f(b_1) + \dots + x_n f(b_n)$.

★ Věta – Matice složeného zobrazení

Pro lineární $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ a báze B_U, B_V, B_W platí

$${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}.$$

Skládání zobrazení tedy odpovídá násobení matic.

📌 Poznámka. [Matice přechodu] Speciálně pro identitu je ${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}$ *matice přechodu* od báze B_1 k B_2 ; splňuje $[x]_{B_2} = {}_{B_2}[\text{id}]_{B_1} [x]_{B_1}$. V T^n ji spočítáme úpravou $(B_2 \mid B_1) \xrightarrow{\text{RREF}} (I_n \mid {}_{B_2}[\text{id}]_{B_1})$, kde sloupce zapisujeme jako souřadnice bází v kanonické bázi.

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 3 – Linear transformations and matrices (*matice jako lineární zobrazení*).

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 4 – Matrix multiplication as composition (*součin matic jako skládání zobrazení*).

5.3 Izomorfismus

Definice – Izomorfismus

Izomorfismus je vzájemně jednoznačné (prosté a na) lineární zobrazení. Existuje-li mezi U, V izomorfismus, jsou *izomorfní*.

★ Věta – Vlastnosti izomorfismu

Izomorfismus zobrazuje bázi na bázi, zachovává lineární (ne)závislost i dimenzi. Lineární f je izomorfismus právě tehdy, když nějaká (libovolná) jeho matice je regulární, a pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Všechny n -rozměrné prostory nad T jsou navzájem izomorfní (konkrétně s T^n přes zobrazení $x \mapsto [x]_B$).

 **Intuice.** Izomorfismus znamená „stejnou strukturu až na přejmenování“. Proto můžeme libovolný konečně generovaný prostor (polynomy, matice, ...) převést souřadnicemi do T^n a tam počítat lineární nezávislost, dimenzi a báze standardně.

Příklad – SZZ jaro 2023 č. 3: Lineární zobrazení v $\mathbb{Z}_5^2$

(Reálná otázka SZZ: jaro 2023, č. 3 – Lineární zobrazení)

Zadání.

- (1) Definujte matici lineárního zobrazení vzhledem k zadaným bázím.
- (2) Formulujte tvrzení o matici složeného zobrazení.
- (3) Lineární zobrazení $g : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ splňuje $f \circ g \circ h = \text{id}$, kde

$$f((1, 0)^T) = h((0, 1)^T) = (3, 4)^T, \quad f((0, 1)^T) = h((1, 0)^T) = (4, 1)^T.$$

Najděte matici g vzhledem ke kanonickým bázím.

Řešení.

- (1) j -tý sloupec matice ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ tvoří souřadnice obrazu $[f(x_j)]_{B_V}$ (viz definice výše).
- (2) Pro složení platí ${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$ (viz věta výše).
- (3) **Matice F a H .** Sloupce matic zobrazení (vzhledem ke kanonickým bázím) jsou obrazy kanonických vektorů:

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} (f(e_1), f(e_2)), \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} (h(e_1), h(e_2)).$$

Matice složeného zobrazení je součin matic (bod 2), takže z $f \circ g \circ h = \text{id}$ plyne $FGH = I$, odkud $G = F^{-1}H^{-1}$.

Inverze (mod 5). Inverzi matice řádu 2 počítáme přes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (\det)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (vše modulo 5, kde $-4 \equiv 1$, $-3 \equiv 2$, $-1 \equiv 4$):

$$\det F = 3 - 16 = -13 \equiv 2, \quad 2^{-1} = 3 : \quad F^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det H = 16 - 3 = 13 \equiv 3, \quad 3^{-1} = 2 : \quad H^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Závěr. Vynásobením:

$$G = F^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \pmod{5}.$$

Ověření: $FG = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $(FG)H = I$.

6 Skalární součin (norma, ortogonalizace, projekce)

6.1 Skalární součin, norma a nerovnosti

Definice – Skalární součin nad $\mathbb{R}$

Skalární součin na reálném prostoru V je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, s rovností jen pro $x = 0$ (pozitivní definitnost),
- (2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ a $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (linearita v 1. složce),
- (3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symetrie).

Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ je $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_i x_i y_i$.

 **Intuice.** Skalární součin měří „shodu směru“ dvou vektorů. Pro standardní součin v $\mathbb{R}^n$ platí $x^T y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory – zachycuje tedy zároveň délky i vzájemný úhel. Axiomy (pozitivní definitnost, linearita, symetrie) jsou přesně ty vlastnosti standardního součinu, které potřebujeme, abychom pojem přenesli i na obecné prostory (matice, funkce, ...).

Definice – Norma a kolmost

Norma indukovaná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Vektory jsou *kolmé* ($x \perp y$), je-li $\langle x, y \rangle = 0$.

★ Věta – Pythagorova, Cauchyho–Schwarzova, trojúhelníková

Pro vektory prostoru se skalárním součinem platí:

- *Pythagorova*: je-li $x \perp y$, pak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;
- *Cauchyho–Schwarzova* (CS): $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, s rovností právě při lineární závislosti x, y ;
- *trojúhelníková*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

 **Intuice.** Pro standardní součin platí $x^T y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory; CS pak jen říká $|\cos \varphi| \leq 1$. Trojúhelníková nerovnost se z CS odvodí umocněním $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

6.2 Ortonormální báze, Fourierovy koeficienty, Gram–Schmidt

Definice – Ortonormální systém

Systém $z_1, \dots, z_n$ je *ortogonální*, je-li $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$, a *ortonormální*, je-li navíc $\|z_i\| = 1$. Ortonormální systém je vždy lineárně nezávislý.

★ Věta – Fourierovy koeficienty

Je-li $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze V , pak pro každé $x \in V$ platí

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i.$$

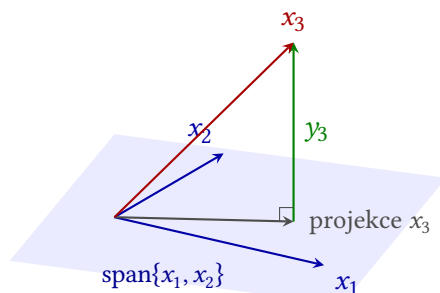
Skaláry $\langle x, z_i \rangle$ jsou *Fourierovy koeficienty* (přímo souřadnice x v bázi); $\langle x, z_i \rangle z_i$ je projekce x na přímku $\text{span}\{z_i\}$.

★ Věta – Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Z lineárně nezávislých $x_1, \dots, x_n$ vyrobíme ortonormální bázi téhož obalu postupem: pro $k = 1, \dots, n$

$$y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j, \quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k.$$

Intuice. V k -tém kroku od x_k odečteme jeho projekci do prostoru už zpracovaných vektorů; zbytek y_k je proto kolmý na všechny předchozí. Nakonec ho jen znormujeme na jednotkovou délku.



Gram–Schmidt ve 3D: $y_3 = x_3 - \sum_{i=1}^2 \frac{\langle x_3, z_i \rangle}{\langle z_i, z_i \rangle} z_i$ odečte projekci x_3 do roviny $\text{span}\{x_1, x_2\}$; pravý úhel u paty projekce ukazuje, že $y_3 \perp x_1$ i $y_3 \perp x_2$.

✎ Příklad – Gram–Schmidt

Zadání. Ortonormalizujte $x_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 1, 1, 1)^T$, $x_3 = (1, 0, 0, 1)^T$ (standardní součin).

Řešení.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1, 0)^T, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 0, 1)^T, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T.$$

✎ Příklad – SZZ podzim 2022 č. 4: Báze a ortogonální báze sloupcového prostoru

(Reálná otázka SZZ: podzim 2022, č. 4 – Báze a ortogonální báze)

Zadání. Buď $A = BC$, kde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (5 \times 2), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2 \times 5).$$

(1) Najděte bázi sloupcového prostoru A . (2) Definujte pojem ortogonální báze. (3) Najděte ortogonální bázi sloupcového prostoru A .

Řešení.

(1) Protože C má plnou řádkovou hodnotu 2, je $\{Cx : x \in \mathbb{R}^5\} = \mathbb{R}^2$, takže $S(A) = \{B(Cx)\} = \{By : y \in \mathbb{R}^2\} = S(B)$ a $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$. Bázi proto tvoří dva (lineárně nezávislé) sloupce B :

$$b_1 = (1, 2, 1, 1, 1)^T, \quad b_2 = (3, 2, 2, 0, -1)^T.$$

(2) *Ortogonální báze* je báze, jejíž každé dva různé vektory mají nulový skalární součin (jsou na sebe kolmé).

(3) Gram–Schmidt na b_1, b_2 : $u_1 = b_1$, $\|u_1\|^2 = 8$, $b_2 \cdot u_1 = 8$, tedy

$$u_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = b_2 - \frac{8}{8} u_1 = (2, 0, 1, -1, -2)^T, \quad u_1 \cdot u_2 = 0.$$

Hledaná ortogonální báze je $\{(1, 2, 1, 1, 1)^T, (2, 0, 1, -1, -2)^T\}$.

6.3 Ortogonální doplněk a projekce

Definice – Ortogonální doplněk

$M^\perp = \{x \in V; \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M\}$ je *ortogonální doplněk* M ; je to vždy podprostor a $M^\perp = \text{span}(M)^\perp$.

★ Věta – Vlastnosti doplňku podprostoru

Pro podprostor U konečně generovaného V platí $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$, dále $V = U + U^\perp$, $U \cap U^\perp = \{0\}$ a $(U^\perp)^\perp = U$. (Rozšíříme-li ortonormální bázi U na ortonormální bázi V , doplňkové vektory jsou ortonormální bázi $U^\perp$.)

Definice – Ortogonální projekce

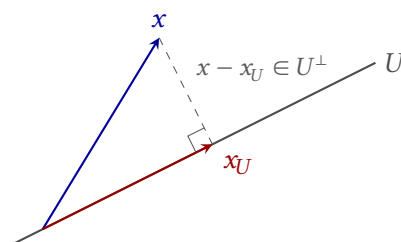
Projekcí vektoru $x \in V$ do podprostoru U je vektor $x_U \in U$ nejbližší k x , tj. $\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$.

★ Věta – O ortogonální projekci

Projekce x_U existuje a je jediná; je charakterizována tím, že $x - x_U \in U^\perp$. Je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U , pak

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i.$$

Zobrazení $x \mapsto x_U$ je lineární (projekce jako lineární zobrazení).



Ortogonalní projekce: $x_U = \arg \min_{u \in U} \|x - u\|$ je nejbližší bod U , rozdíl $x - x_U$ kolmý na U (pravý úhel u paty); pro přímku $U = \text{span}\{a\}$ je $x_U = \frac{x^T a}{a^T a} a$.

✎ Příklad – Projekce na přímku

Projekce $x \in \mathbb{R}^n$ na přímku $\text{span}\{a\}$ ($a \neq 0$) je $x_U = \frac{x^T a}{a^T a} a$. Pro U s bázi $w_1, \dots, w_m$ bez ortonormalizace dostaneme souřadnice projekce řešením soustavy $G[x_U]_B = (\langle w_1, x \rangle, \dots, \langle w_m, x \rangle)^T$ s regulární Gramovou maticí $G_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$.

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 9 – Dot products and duality (skalární součin a projekce).

6.4 Ortogonální matice

Definice – Ortogonální matice

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonální*, pokud $Q^T Q = I_n$.

★ Věta – Charakterizace a vlastnosti

Pro $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ekvivalentní:

- (1) Q je ortogonální;
- (2) $Q^{-1} = Q^T$;
- (3) $QQ^T = I_n$;
- (4) sloupce (resp. řádky) Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Ortogonální matice navíc zachovává skalární součin i normu: $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ a $\|Qx\| = \|x\|$. Součin ortogonálních matic je opět ortogonální.

Intuice. Ortogonální matice je matice zobrazení, které nedeformuje objekty – zachovává délky a úhly. Geometricky jde o složení rotací a zrcadlení. Každá ortogonální matice řádu 2 je buď rotace $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, nebo rotace složená s překlopením.

🔗 Příklad – SZZ jaro 2024 č. 3: Skalární součin na maticích

(Reálná otázka SZZ: jaro 2024, č. 3 – Skalární součin)

Zadání.

- (1) Ověřte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ je skalární součin na $\mathbb{R}^{m \times n}$, kde $\text{trace}(C) = \sum_i c_{ii}$.
- (2) Rozhodněte, zda jsou matice $A \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ s prvky rostoucími po antidiagonálách (řádky $(1, -2, 3, -4, 5, -6)$, $(-2, 3, \dots)$, ...) a matice B se všemi prvky -13 na sebe ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu (tj. zda $\langle A, B \rangle = 0$).
- (3) Zformulujte CS nerovnost a rozhodněte, zda pro čtvercovou A řádu n platí $(\text{trace } A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Řešení.

- (1) Rozepsáním $\text{trace}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ – to je standardní skalární součin, díváme-li se na matici $m \times n$ jako na vektor o mn složkách. Axiomy se ověří přímo: $\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ s rovností jen pro $A = 0$; symetrie i linearita jsou zřejmé.
- (2) $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot (-13) = -13 \sum_{i,j} a_{ij}$. Součet všech prvků A je součet jejích řádkových součtů $-3 + 3 - 3 + 3 = 0$, takže $\langle A, B \rangle = 0$ – matice jsou na sebe ortogonální.
- (3) CS nerovnost: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, po umocnění $\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$. Nerovnost srovnává $(\text{trace } A)^2$ s $n \cdot \text{trace}(A^T A)$; protože $\text{trace } A = \langle I_n, A \rangle$, volíme v CS $u = I_n$, $v = A$:

$$\langle I_n, A \rangle = \text{trace}(I_n^T A) = \text{trace } A, \quad \langle I_n, I_n \rangle = \text{trace}(I_n) = n, \quad \langle A, A \rangle = \text{trace}(A^T A).$$

Dosazením do CS dostáváme $(\text{trace } A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$ – nerovnost platí.

7 Determinanty (Laplaceův rozvoj, geometrie)

7.1 Definice a základní vlastnosti

📖 Definice – Determinant

Pro $A \in T^{n \times n}$ je

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) a_{1,p(1)} a_{2,p(2)} \cdots a_{n,p(n)}.$$

Intuice. Každý sčítanec vybere z matice n prvků tak, že z každého řádku a každého sloupce právě jeden, vynásobí je a opatří znaménkem permutace. Pro $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$; pro $n = 3$ Sarrusovo pravidlo (šest členů).

★ Věta – Základní vlastnosti

- $\det(A^T) = \det(A)$;
- determinant trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále (speciálně $\det I_n = 1$);
- *multiplikativnost*: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, a tedy $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;
- vliv ERÚ: vynásobení řádku číslem α násobí determinant α ; výměna dvou řádků mění znaménko; přičtení násobku řádku k jinému determinant nemění;
- má-li matice dva stejné (nebo nulový) řádky, je $\det(A) = 0$.

★ Věta – Kritérium regularity a vztah s vlastními čísly

$A \in T^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Navíc $\det(A)$ je roven součinu vlastních čísel matice A (viz sekci 8).

i Poznámka. [Výpočet determinantu Gaussovou eliminací] Z vlivu ERÚ plyne praktický postup: převedeme A na REF (horní trojúhelníkový tvar), zapamatujeme si změny determinantu (znaménko a škálování), a $\det(A)$ je součin diagonálních prvků děleno nasbíraným faktorem.

★ Věta – Laplaceův rozvoj

Pro $n \geq 2$ a libovolné i platí (rozvoj podle i -tého řádku; analogicky podle sloupce)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

kde A_{ij} vznikne z A vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce.

Příklad – Laplaceův rozvoj

Zadání. Spočítejte $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Laplaceovým rozvojem.

Řešení. Rozvineme podle 1. řádku: pro každý prvek a_{1j} vezmeme jeho *minor* (determinant matice po vyškrtnutí 1. řádku a j -tého sloupce) se znaménkem $(-1)^{1+j}$:

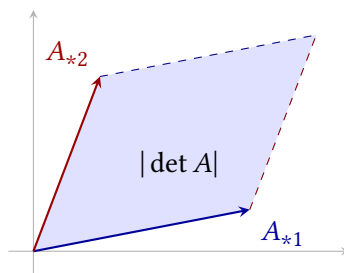
$$\det A = +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(6 - 1) - 1(2 - 0) + 0 = 8.$$

Rozvíjet se vyplatí podle řádku či sloupce s nejvíce nulami. U velkých matic je efektivnější převést matici na trojúhelníkový tvar Gaussovou eliminací (s hlídáním faktorů) a determinant odečíst jako součin diagonály.

7.2 Geometrická interpretace

★ Věta – Determinant jako objem

Zobrazení $x \mapsto Ax$ s $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mění objem geometrických těles s koeficientem $|\det(A)|$. Speciálně objem rovnoběžnostěnu napjatého na řádky (resp. sloupce) matice A je $|\det(A)|$. Znaménko $\det(A)$ udává orientaci (pravo-/levotočivost).



V $\mathbb{R}^2$ je $|\det A| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$ obsah rovnoběžníku napjatého na sloupce A_{*1}, A_{*2} (např. pro $A_{*1} = (2,6; 0,5)$, $A_{*2} = (0,8; 2,1)$ vyjde obsah $|2,6 \cdot 2,1 - 0,5 \cdot 0,8| = 5,06$).

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 6 – The determinant (determinant jako faktor změny objemu a orientace).

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 12 – Cramer's rule, explained geometrically (Cramerovo pravidlo geometricky, přes objemy/determinanty).

📌 Příklad – SZZ jaro 2026 č. 3: Hodnost, determinant, ortogonální báze jádra

(Reálná otázka SZZ: jaro 2026, č. 3 – Matice)

Zadání. Buď $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, jejíž řádkový prostor má bázi tvořenou pouze vektorem $(1, 2, 3)^T$.

- (1) Najděte odstupňovaný tvar A .
- (2) Napište definici determinantu a spočítejte $\det(A)$.
- (3) Najděte ortogonální bázi jádra A .

Řešení.

- (1) Všechny řádky jsou násobky $(1, 2, 3)$, tedy $\text{rank}(A) = 1$ a odstupňovaný tvar je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (2) Definice viz výše. Protože $\text{rank}(A) = 1 < 3$, je A singulární, takže $\det(A) = 0$.
- (3) **Báze jádra.** $\text{Ker}(A) = \{x : (1, 2, 3) \cdot x = 0\}$ má dimenzi $3 - 1 = 2$; bázi tvoří např. $(2, -1, 0)^T$ a $(3, 0, -1)^T$.

Gram-Schmidt.

$$y_1 = (2, -1, 0)^T,$$

$$y_2 = (3, 0, -1)^T - \frac{(3, 0, -1) \cdot (2, -1, 0)}{(2, -1, 0) \cdot (2, -1, 0)} (2, -1, 0)^T = (3, 0, -1)^T - \frac{6}{5} (2, -1, 0)^T = \frac{1}{5} (3, 6, -5)^T.$$

Ortogonální báze jádra je tedy $\boxed{(2, -1, 0)^T, (3, 6, -5)^T}$.

📌 Příklad – SZZ léto 2023 č. 3: Kolmost, zobrazení, změna obsahu

(Reálná otázka SZZ: léto 2023, č. 3 – Lineární algebra)

Zadání. Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

- (1) najděte $x \in \mathbb{R}^2$ tak, aby $Ax \perp Bx$ (standardní součin);
- (2) najděte matici zobrazení, které Ax posílá na Bx pro všechna x ;
- (3) rozhodněte, zda zobrazení $x \mapsto B^{-1}A^3B^{-1}x$ obsahy útvarů zvětšuje či zmenšuje.

Řešení.

- (1) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)^T$ a $Bx = (x_2, x_1 + 2x_2)^T$. Jejich skalární součin je

$$(x_1 + 2x_2)x_2 + (x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) = (x_1 + 2x_2)(x_2 + x_1 + x_2) = (x_1 + 2x_2)^2,$$

což je nula právě tehdy, když $x_1 + 2x_2 = 0$, tj. $\boxed{x = t(-2, 1)^T, t \in \mathbb{R}}$.

- (2) Hledáme M s $M(Ax) = Bx$ pro všechna x . Protože A je regulární ($\det A = -1$), prochází Ax celé $\mathbb{R}^2$, takže podmínka je $MA = B$, odkud $M = BA^{-1}$. Z $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dostaneme

$$M = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ověření } MA = B).$$

(3) Faktor změny obsahu je $|\det(B^{-1}A^3B^{-1})| = \frac{|\det A|^3}{|\det B|^2}$. Zde $\det A = -1$ a $\det B = -1$, takže faktor je $\frac{1}{1} = 1$: obsahy se *nemění* (zobrazení je zachovává, jen převrací orientaci, neboť celkový determinant je $-1 < 0$).

8 Vlastní čísla a vektory (diagonalizace, spektrální rozklad)

8.1 Vlastní čísla a charakteristický polynom

Definice – Vlastní číslo a vektor

Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastním číslem* matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, existuje-li nenulový *vlastní vektor* x s $Ax = \lambda x$.

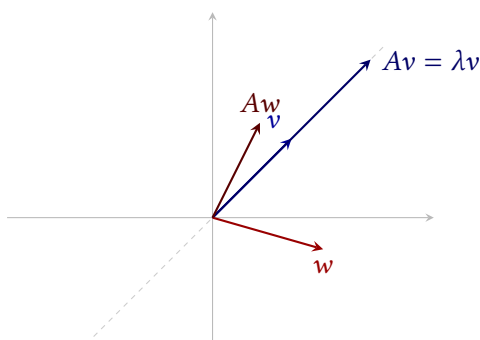
★ Věta – Charakterizace

λ je vlastním číslem A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$; příslušné vlastní vektory jsou nenulové prvky $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Definice – Charakteristický polynom, násobnosti

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ je *charakteristický polynom* (stupně n). *Algebraická násobnost* λ je jeho násobnost jako kořene p_A ; *geometrická násobnost* je $n - \text{rank}(A - \lambda I_n)$ (počet lineárně nezávislých vlastních vektorů). Vždy platí geometrická $\leq$ algebraická.

💡 **Intuice.** Vlastní vektor je „invariantní směr“: zobrazení $x \mapsto Ax$ ho jen natáhne (faktorem λ), neotočí. Vlastní čísla najdeme jako kořeny p_A , vlastní vektory pak jako jádro $A - \lambda I_n$.



Vlastní vektor $v = (1, 1)^T$ pro $\lambda = 2$: zůstává na své přímce, jen se škáluje ($Av = 2v$). Obecný vektor $w = (1, 4; -0, 4)^T$ se otočí mimo svůj směr (Aw na něm neleží).

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 14 – Eigenvectors and eigenvalues (*vlastní směry a faktory*).

★ Věta – Stopa a determinant ze spektra

Má-li $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (včetně násobností), pak $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ a $\text{trace}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. (U reálné matice se komplexní vlastní čísla vyskytují v komplexně sdružených párech.)

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 15 – A quick trick for computing eigenvalues (*rychlý výpočet vlastních čísel 2×2 ze stopy a determinantu – viz vztah výše*).

8.2 Podobnost a diagonalizovatelnost

Definice – Podobnost

$A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou *podobné*, existuje-li regulární S s $A = SBS^{-1}$.

★ Věta – Podobné matice

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom, tedy stejná vlastní čísla (i násobnosti), stejnou hodnotu i determinant. Vlastní vektory se obecně liší.

 **Intuice.** Podobnost = táž lineární transformace v jiné bázi (S je matice přechodu). Proto se vlastní čísla nemění – jsou vlastností zobrazení, ne souřadnic. Naopak jádro se měnit může: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jsou podobné, ale mají různá jádra.

 **Video:** 3Blue1Brown, Essence of Linear Algebra kap. 13 – Change of basis (změna báze).

Definice – Diagonalizovatelnost a spektrální rozklad

A je *diagonalizovatelná*, je-li podobná diagonální matici, tj. $A = S\Lambda S^{-1}$ se Λ diagonální. Tomuto rozkladu se říká *spektrální rozklad* (na diagonále Λ je spektrum).

★ Věta – Charakterizace diagonalizovatelnosti

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů; ty pak tvoří sloupce S a příslušná vlastní čísla diagonálu Λ . Ekvivalentně: pro každé vlastní číslo splývá algebraická a geometrická násobnost. Speciálně má-li A n navzájem různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná.

 **Poznámka.** [Mocniny matice] Diagonalizace usnadňuje mocnění: $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$, kde Λ^k jen umocní diagonálu. Toho se využívá k řešení rekurencí (Fibonacci) či studiu asymptotiky.

8.3 Symetrické matice

Reálné symetrické matice ($A = A^T$) se chovají obzvlášť hezky: vlastní čísla jsou vždy reálná a vlastní vektory lze vybrat navzájem kolmé. To z nich dělá nejdůležitější diagonalizovatelnou třídu (váže se např. na kovarianční matice a PCA ve strojovém učení).

★ Věta – Spektrální rozklad symetrické matice

Reálná symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má vždy reálná vlastní čísla a je *ortogonálně diagonalizovatelná*: existuje ortogonální Q a diagonální Λ tak, že $A = Q\Lambda Q^T$. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé, takže lze vybrat ortonormální bázi z vlastních vektorů.

 **Intuice.** Symetrická matice odpovídá „samosdruženému“ zobrazení ($\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$); to vynutí, že různým vlastním číslům přísluší kolmé vlastní vektory. V bázi z těchto vlastních vektorů je zobrazení čistě „škálování podél kolmých os“, proto $A = Q\Lambda Q^T$ s ortogonální Q .

Příklad – SZZ jaro 2025 č. 3: Symetrická matice, podobnost, diagonalizace

(Reálná otázka SZZ: jaro 2025, č. 3 – Matice)

Zadání.

- (1) Najděte symetrickou $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ s $\text{Ker}(S) = \text{span}\{(1, 5, 1)^T, (0, 2, 1)^T\}$.
- (2) Definujte podobné matice a uveďte, které z veličin hodnost / determinant / jádro mají podobné matice stejné.
- (3) Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla 3 a 1. Je diagonalizovatelná?

Řešení.

- (1) **Kolmost na jádro.** Pro symetrickou S je řádkový prostor roven sloupcovému a kolmý na jádro (neboť $S(S)^{\perp} = \text{Ker}(S^T) = \text{Ker}(S)$). Jádro je 2-rozměrné, takže řádkový prostor je 1-rozměrný, generovaný vektorem kolmým na oba vektory jádra:

$$(1, 5, 1) \times (0, 2, 1) = (3, -1, 2).$$

Konstrukce. Symetrická matice hodnosti 1 s tímto řádkovým prostorem je

$$S = \alpha (3, -1, 2)^T (3, -1, 2) = \alpha \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

(Ověření: $(3, -1, 2)$ je kolmý na oba generátory jádra, takže $Sx = 0$ pro x z jádra.)

- (2) A, B jsou podobné, je-li $A = RBR^{-1}$ pro regulární R . Stejně mají *hodnost i determinant; jádro* obecně ne (protipříklad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
- (3) **Třetí vlastní číslo ze stopy.** Stopa je $2 - 1 + 4 = 5 = 3 + 1 + \lambda_3$, takže $\lambda_3 = 1$ – číslo 1 je dvojnásobné (algebraicky).

Algebraická vs. geometrická. $\text{rank}(A - I_3) = 2$, takže geometrická násobnost čísla 1 je $3 - 2 = 1 < 2$. Násobnosti nesplývají, takže A není diagonalizovatelná.



Příklad – SZZ léto 2024 č. 3: Steinitz a výměna vlastních vektorů

(Reálná otázka SZZ: léto 2024, č. 3 – Báze vektorových prostorů)

Zadání.

- (1) Zformulujte Steinitzovu větu o výměně.
- (2) Reálná A je diagonalizovatelná jako $D = R^{-1}AR$ s diagonálou $D = (17, 17, 23, 17, 23)$, kde vlastní vektory tvoří sloupce

$$R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -8 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda lze některý sloupec R vyměnit za vektor u_i tak, aby A šla diagonalizovat i výslednou maticí R' : (a) $u_1 = (4, 2, 2, -3, -2)^T$; (b) $u_2 = (7, -6, -2, 12, -6)^T$.

Řešení.

- (1) Viz znění Steinitzovy věty v sekci 4.
- (2) Sloupce R jsou vlastní vektory; podle diagonály patří sloupce 1, 2, 4 vlastnímu číslu 17 (vlastní podprostor dimenze 3) a sloupce 3, 5 vlastnímu číslu 23. Aby R' stále diagonalizovala A , musí být nový sloupec opět vlastním vektorem a výsledek musí být báze.
 - (a) $[u_1]_B = (0, 2, 0, -3, 0)^T$, tedy $u_1 = 2R_{*2} - 3R_{*4}$. Oba leží v podprostoru čísla 17, takže u_1 je vlastní vektor pro 17. Vyměnit lze ty sloupce s nenulovým koeficientem, po nichž zůstane báze – tedy sloupec 2 nebo sloupec 4.
 - (b) $[u_2]_B = (0, 1, 1, 0, -2)^T$, tj. $u_2 = R_{*2} + R_{*3} - 2R_{*5}$ míchá vlastní podprostory čísel 17 a 23. Vektor u_2 proto není vlastním vektorem a výměnu provést *nelze*.

9 Pozitivně (semi)definitní matice (Choleského rozklad)

Definice – Pozitivně (semi)definitní matice

Symetrická $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *pozitivně definitní*, pokud $x^T A x > 0$ pro každé $x \neq 0$, a *pozitivně semidefinitní*, pokud $x^T A x \geq 0$ pro každé x .

★ Věta – Charakterizace pozitivní definitnosti

Pro symetrickou $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ekvivalentní:

- (1) A je pozitivně definitní;
- (2) všechna vlastní čísla A jsou kladná;
- (3) existuje U hodnosti n s $A = U^T U$.

(Pro semidefinitnost: vlastní čísla nezáporná, resp. $A = U^T U$ pro nějaké U .) Je-li A pozitivně definitní, je regulární a A^{-1} je rovněž pozitivně definitní.

 **Intuice.** Pozitivní definitnost znamená, že kvadratická forma $x^T A x$ je „miskovitá“ – má v počátku ostré minimum. Protože $\det(A) = \prod \lambda_i$, je u pozitivně definitní matice determinant kladný; obráceně to ale samo o sobě nestačí (nutno více podmínek – viz Sylvester).

★ Věta – Vztah se skalárním součinem

Operace $\langle x, y \rangle = x^T A y$ je skalárním součinem na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když A je pozitivně definitní. (Tím jsou popsány všechny skalární součiny na $\mathbb{R}^n$.)

★ Věta – Sylvestrovo kritérium

Symetrická A je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny *hlavní vedoucí minory* (determinanty levých horních podmatic $A_1, \dots, A_n$) jsou kladné.

 **Poznámka.** [Testování Gaussovou eliminací] Symetrická A je pozitivně definitní právě tehdy, když ji Gaussova eliminace (jen přičítání násobků řádku s pivotem k řádkům pod ním) převede na tvar s kladnou diagonálou. To je výpočetně levnější než Sylvestrovo kritérium.

★ Věta – Choleského rozklad

Pro každou pozitivně definitní $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje *jediná* dolní trojúhelníková matice L s kladnou diagonálou taková, že

$$A = LL^T.$$

 **Intuice.** Choleský je „odmocnina“ pozitivně definitní matice ve tvaru trojúhelníkového činitele. Je to nejúčinnější test pozitivní definitnosti (řádově $\frac{1}{3}n^3$ operací) a zároveň praktický nástroj pro řešení soustav $Ax = b$ s pozitivně definitní A (přes $Ly = b$ a $L^T x = y$) a pro jejich inverzi.

Příklad – Výpočet Choleského rozkladu

Zadání. Najděte Choleského rozklad $A = LL^T$ pozitivně definitní matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Řešení. Prvky dolní trojúhelníkové L určíme porovnáním $A = LL^T$ po sloupcích shora dolů:

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, & \ell_{21} &= \frac{a_{21}}{\ell_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, & \ell_{31} &= \frac{a_{31}}{\ell_{11}} = \frac{4}{2} = 2, \\ \ell_{22} &= \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{10 - 1} = 3, & \ell_{32} &= \frac{a_{32} - \ell_{31}\ell_{21}}{\ell_{22}} = \frac{1 - 2 \cdot (-1)}{3} = 1, \\ \ell_{33} &= \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = \sqrt{6 - 4 - 1} = 1. \end{aligned}$$

Tedy $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (snadno ověříme $LL^T = A$). Kdyby pod některou odmocninou vyšlo nekladné číslo, matice by nebyla pozitivně definitní.

Příklad – SZZ léto 2025 č. 3: Skalární součin $x^T Ay$ a pozitivní definitnost

(Reálná otázka SZZ: léto 2025, č. 3 – Skalární součin)

Zadání. Uvažujme $\langle x, y \rangle = x^T Ay$ pro symetrickou A .

- (1) Rozhodněte: (a) je-li $x^T Ay$ skalární součin, je $\det(A) > 0$? (b) je-li B symetrická regulární, je $x^T B^2 y$ skalární součin?
- (2) Zapište CS nerovnost pro $\langle x, y \rangle = x^T Ay$ pomocí maticových operací.
- (3) Je matice A s prvky $a_{ij} = \min(i, j)$ pozitivně definitní pro všechna $n \geq 1$? Formulujte kritérium a ověřte.

Řešení.

- (1) (a) *Ano*: skalární součin $\Rightarrow A$ pozitivně definitní $\Rightarrow$ kladná vlastní čísla $\Rightarrow \det(A) = \prod \lambda_i > 0$.
(b) *Ano*: $B^2 = B^T B$ je symetrická a její vlastní čísla jsou $(\lambda_i^B)^2 > 0$ (regulární B nemá nulové vlastní čísla), takže B^2 je pozitivně definitní a $x^T B^2 y$ je skalární součin.
- (2) CS $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ má zde tvar $|x^T Ay| \leq \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$.
- (3) **Kritérium.** Symetrická matice je pozitivně definitní, má-li Choleského rozklad $A = LL^T$ (ekvivalentně kladná vlastní čísla / kladné hlavní vedoucí minory).

Konstrukce L . Pro $a_{ij} = \min(i, j)$ vezmeme dolní trojúhelníkovou L se samými jedničkami (v dolní části i na diagonále). Pak

$$(LL^T)_{ij} = \sum_k L_{ik} L_{jk} = \#\{k : k \leq i \text{ a } k \leq j\} = \min(i, j) = a_{ij}.$$

Tedy $A = LL^T$ existuje a A je p.d. pro všechna $n \geq 1$.

Shrnutí

i Poznámka. Klíčové vlastnosti a vzorce (přehled k SZZ). Stručný výčet klíčových definic, vět a vzorců okruhu M2. Zkratky: LN = lineárně nezávislé, LZ = lineárně závislé, p.d. = pozitivně definitní, psd = pozitivně semidefinitní.

Algebra (grupy, permutace, tělesa).

- Grupa: asociativita, neutrální prvek, ke každému prvku inverze; *podgrupa* = neprázdná podmnožina uzavřená na operaci i inverzi. Komutativní grupa = abelovská.
- Permutace: $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{\#\text{transpozic}} = (-1)^{n - \#\text{cyklů}}$; $\text{sgn}(\pi\sigma) = \text{sgn}(\pi) \text{sgn}(\sigma)$; sudá vs. lichá.
- Těleso: $\mathbb{Z}_p$ je těleso $\iff p$ je prvočíslo; inverze v $\mathbb{Z}_p$ přes malou Fermatovu větu ($a^{p-1} = 1$, tedy $a^{-1} = a^{p-2}$). Konečné těleso má p^k prvků.

Soustavy, matice, hodnost.

- Frobenius: $Ax = b$ řešitelná $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$; právě jedno řešení $\iff$ navíc $\text{rank} = n$ (počet neznámých), více řešení $\iff \text{rank} < n$ (nad $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho, nad $\mathbb{Z}_p$ jich je p^{n-r}).

Množina řešení = partikulární řešení + $\text{Ker}(A)$ (afinní podprostor).

- Regulární A řádu n : $\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A^{-1}$ existuje $\iff$ řádky/sloupce LN $\iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff 0$ není vlastní číslo.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; inverze Gaussovou–Jordanovou eliminací $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$. Vždy $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ (řádková hodnota = sloupcová).

Vektorové prostory.

- Báze = LN + generuje; všechny báze stejně velké = dim. Steinitz: žádná LN množina není větší než generující ($|\text{LN}| \leq |\text{gen}|$), a lze ji do ní vyměnit.
- Rank-nullity: $\dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = n$ (počet sloupců).
- Řádkový i sloupcový prostor mají dimenzi rank; $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.
- Souřadnice vektoru u v bázi B (sloupce matice R): $[u]_B = R^{-1}u$, prakticky se řeší soustavou $Rc = u$.

Lineární zobrazení.

- Matice vzhledem k bázím ${}_B[f]_{B_U}$; matice složení = součin matic; změna báze = podobnost $R^{-1}AR$.
- $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim$ definičního prostoru.
- Izomorfismus $\iff$ bijekce $\iff$ matice regulární $\iff$ prosté ($\text{Ker} = \{0\}$) a na zároveň; vyžaduje stejnou dimenzi obou prostorů.

Skalární součin a ortogonalita.

- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$; Cauchy–Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (rovnost $\iff$ LZ); trojúhelníková $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; Pythagoras $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$.
- Ortogonální báze: souřadnice = Fourierovy koeficienty $c_i = \langle x, v_i \rangle / \langle v_i, v_i \rangle$ (jen pro ortogonální bázi!); Gram–Schmidt takovou bázi vyrobí.
- Ortogonální projekce na U : nejbližší bod $x_U = \arg \min_{u \in U} \|x - u\|$, charakterizována podmínkou $x - x_U \in U^\perp$; rozklad $x = x_U + x_{U^\perp}$. Doplněk: $\dim U + \dim U^\perp = n$, $(U^\perp)^\perp = U$.
- Ortogonální matice Q : $Q^T Q = I \iff Q^{-1} = Q^T \iff$ sloupce tvoří ortonormální bázi; zachovává normu i skalární součin.

Determinant.

- $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^T) = \det A$, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, $\det(cA) = c^n \det A$; trojúhelníková matice $\Rightarrow \det =$ součin diagonály.
- $\det(A) = 0 \iff A$ singulární $\iff$ sloupce LZ; $\det(A) = \prod \lambda_i$, $\text{trace}(A) = \sum \lambda_i$.
- Laplaceův rozvoj podle řádku/sloupce. Řádkové úpravy: výměna řádků $\rightarrow$ znaménko -1 , vynásobení řádku $c \rightarrow \det \cdot c$, přičtení násobku jiného řádku $\rightarrow$ beze změny.
- Geometricky $|\det A| =$ objem rovnoběžnostěny na sloupcích A ; znaménko = orientace; je to faktor změny objemu zobrazení $x \mapsto Ax$.

Vlastní čísla a vektory.

- Charakteristický polynom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ stupně n ; $\sum \lambda_i = \text{trace}(A)$, $\prod \lambda_i = \det(A)$.
- Geometrická násobnost (= dim vlastního podprostoru) $\leq$ algebraická násobnost. A diagonalizovatelná $\iff$ geom. = alg. pro každé $\lambda \iff$ existuje báze z vlastních vektorů.
- A^k má vlastní čísla λ^k , A^{-1} má $1/\lambda$, $p(A)$ má $p(\lambda)$ (se stejnými vlastními vektory).
- Podobné matice ($B = R^{-1}AR$) sdílejí char. polynom, vlastní čísla, det, trace, rank i dimenzi jádra (ne však jádro jako konkrétní množinu).
- Symetrická A : reálná λ , vlastní vektory různých λ jsou na sebe kolmé, $A = Q\Lambda Q^T$ s ortogonální Q (spektrální věta) $\Rightarrow$ vždy diagonalizovatelná.

Pozitivně (semi)definitní matice.

- Symetrická A je p.d. $\iff x^T A x > 0 \forall x \neq 0 \iff$ všechna $\lambda_i > 0 \iff A = LL^T$ (Choleský, L dolní trojúhelníková s kladnou diagonálou) $\iff$ kladné hlavní vedoucí minory (Sylvester). Psd: $x^T A x \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0 \iff A = U^T U$; Sylvester s „ ≥ 0 “ u vedoucích minorů pro psd neplatí (např. $\text{diag}(0, -1)$); psd je ekvivalentní nezápornosti všech hlavních minorů.
- $\langle x, y \rangle = x^T A y$ je skalární součin $\iff A$ symetrická a p.d.; $B^T B$ je vždy psd, a p.d. $\iff B$ má

plnou sloupcovou hodnot (u čtvercové B : regulární).

Zdroje

- M. Hladík: *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*, Matfyzpress, 2019 (primární zdroj výkladu, učebnice k přednáškám Lineární algebra 1 a 2).
<https://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA/>
- J. Matoušek (ve spolupráci s J. Rohnem a J. Tůmou): *Podrobný minimální sylabus přednášek Lineární algebra I a II pro informatiky*, 2010.
<https://kam.mff.cuni.cz/~matousek/ls-2pp.pdf>
- 3Blue1Brown: *Essence of Linear Algebra* (videa odkazovaná v textu).
https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab
- MFF UK: požadavky ke státní závěrečné zkoušce (Informatika, Bc.) a zadání otázek z minulých termínů.
<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>