

Příklady otázek – Diskrétní matematika

Reálné otázky ze SZZ 2022–2026 (M3)

Jakub Klesá

Pokryté předměty: NDMI002 (Diskrétní matematika), NDMI011 (Kombinatorika a grafy)
1)

Obsah

1	Zobrazení	1
2	Binární relace	2

Poznámka. Tento dokument obsahuje reálné otázky z minulých termínů SZZ (2022–2026) zařazené do okruhu M3. U otázek s obrázkem je grafika oříznutá z originálního PDF (viz odkaz na zdroj). Text, číselná data a tabulky jsou přepsané věrně. Zadání i oficiální náčrty řešení pocházejí ze sad zveřejněných na webu MFF UK:

<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>

Náčrty označené jako doplněné jsou vlastní, oficiální sada je k dané otázce neobsahuje.

1 Zobrazení

(Reálná otázka: léto 2022, č. 4 – Zobrazení (injekce, surjekce, počty))

Zadání.

1. Definujte, kdy je zobrazení $f: X \rightarrow Y$ prosté (injektivní) a kdy „na“ (surjektivní).
2. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete, kolik existuje prostých zobrazení z $\{1, \dots, n\}$ do $\{1, \dots, 2n\}$. Zdůvodněte.
3. Pro $n \in \mathbb{N}$ určete, kolik existuje zobrazení $\{1, \dots, 2n\}$ na $\{1, \dots, n\}$ takových, že pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ existují právě dvě hodnoty i, j s $f(i) = f(j) = k$. Zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. Zobrazení f je *prosté (injektivní)*, pokud různé vzory mají různé obrazy, tj. $\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Zobrazení f je *na (surjektivní)*, pokud každý prvek Y je obrazem aspoň jednoho prvku X , tj. $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
2. Prosté zobrazení $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, 2n\}$ stavíme po prvcích: pro obraz prvního prvku je $2n$ možností, pro druhý $2n - 1$ (jeden cíl je obsazený), ..., pro n -tý $2n - (n - 1) = n + 1$. Celkem

$$2n \cdot (2n - 1) \cdots (n + 1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

3. Každá z n hodnot je obrazem právě dvojice vzorů; hledáme tedy rozdělení $2n$ prvků do n označených dvojic (dvojice pro $k = 1$, pro $k = 2$, ...). Uspořádaných $2n$ -tic je $(2n)!$, ale uvnitř každé z n dvojic na pořadí nezáleží, tedy dělíme $2!$ za každou dvojici:

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Kontrola pro $n = 2$: prostých zobrazení $4 \cdot 3 = 12 = \frac{4!}{2!}$, takových surjekcí $\frac{4!}{2^2} = 6$.

(V PDF bez náčrtu řešení; náčrt doplněn k výkladu okruhu, výpočty ověřeny.)

2 Binární relace

(Reálná otázka: podzim 2025, č. 4 – Binární relace)

Zadání.

- Definujte podmínky, které musí splňovat binární relace R na neprázdné množině X , aby byla ekvivalencí. Podmínky formulujte pomocí matematických zápisů s použitím logických spojek, kvantifikátorů a podobně.
- Pro $X = \{a, b, c, d\}$ určete, kolik různých ekvivalencí na množině X existuje.
- Pro $X = \{a, b, c, d\}$ najděte příklad binární relace, která je tranzitivní, ale není symetrická ani (slabě) antisymetrická. Zdůvodněte, že nalezená relace má požadované vlastnosti.
(Antisymetrii miníme $\forall x, y \in X : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$.)

Náčrt řešení.

- Ekvivalence je relace, která je
 - reflexivní $\forall x \in X : (x, x) \in R$
 - symetrická $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
 - tranzitivní $\forall x, y, z \in X : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$ ¹
- Budeme počítat rozklady X na třídy ekvivalence, rozbořem případů dle velikostí rozkladových tříd: jedna třída (velikosti 4) $1 \times$, dvě třídy $1 + 3$ $4 \times$, $2 + 2$ $3 \times$, tři třídy $(2 + 1 + 1)$ $6 \times$, čtyři jednoprvkové třídy $1 \times$, celkem 15 možností.
- Například $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d)\}$. Tranzitivita rozbořem případů (předpoklady splňují volby $x = a, y = b, z = a$ a $x = b, y = a, z = b$), volba $x = a, y = b$ porušuje antisymetrii, volba $x = c, y = d$ porušuje symetrii.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu):

- K bodu 2. Třídy ekvivalence tvoří rozklad X a naopak každý rozklad určuje ekvivalenci („být ve stejné třídě“), takže ekvivalencí je přesně tolik jako rozkladů. Počty u jednotlivých tvarů: u $3 + 1$ volíme samotný prvek ($\binom{4}{1} = 4$), u $2 + 1 + 1$ volíme dvojici ($\binom{4}{2} = 6$), u $2 + 2$ volíme dvojici obsahující a (jejího partnera lze vybrat 3 způsoby, zbytek tvoří druhou dvojici), tj. $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$.

¹V originálním PDF je zde překlep: „ $\in R$ “ místo „ $\in X$ “ a spojka „ $\wedge$ “ místo „ $\vee$ “. Zde uvedeno korektně.

- *K bodu 3, tranzitivita.* Probíráme všechny dvojice $(x, y), (y, z) \in R$. Dvojice (c, d) nemá pokračování (žádná dvojice nezačíná v d) a žádná dvojice nekončí v c , takže (c, d) se v předpokladu tranzitivity nikdy neobjeví spolu s jinou dvojicí. Zbývají dvojice uvnitř $\{a, b\}$, kde R obsahuje všechny čtyři možné dvojice; výsledná (x, z) tedy v R leží vždy. Náčrt jmenuje jen dva případy, kde $x \neq y$ a $y \neq z$ (výsledkem je smyčka (a, a) , resp. (b, b)); případy se smyčkou jsou triviální, protože z $(x, x), (x, z) \in R$ je $(x, z) \in R$ přímo předpoklad (obdobně u $(x, z), (z, z) \in R$).