

Příklady otázek – Teorie grafů

Reálné otázky ze SZZ 2023–2026 (M4)

Jakub Klesá

Pokryté předměty: NDMI002 (Diskrétní matematika), NDMI011 (Kombinatorika a grafy
1)

Obsah

1	Rovinné grafy	1
2	Souvislost grafů	2
3	Barevnost grafů	4
4	Eulerovské grafy	5
5	Rovinné grafy	6

Poznámka. Tento dokument obsahuje reálné otázky z minulých termínů SZZ (2023–2026) zařazené do okruhu M4. U otázek s obrázkem je grafika oříznutá z originálního PDF (viz odkaz na zdroj). Text, číselná data a tabulky jsou přepsané věrně. Zadání i oficiální náčrty řešení pocházejí ze sad zveřejněných na webu MFF UK:

<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>

Náčrty označené jako doplněné jsou vlastní, oficiální sada je k dané otázce neobsahuje. Vlastní doplnění k oficiálním náčrtům jsou uvedena v odděleném bloku *Doplňující vysvětlení*.

1 Rovinné grafy

(Reálná otázka: jaro 2023, č. 4 – Rovinné grafy)

Zadání.

1. Uveďte Eulerovu formuli pro rovinné grafy (o počtu vrcholů, hran a stěn).
2. Rozhodněte, zdali může existovat rovinný graf G na 40 vrcholech s 80 hranami a 5 komponentami souvislosti takový, že neobsahuje C_3 jako podgraf.
3. Určete, jaký nejvyšší možný počet hran může mít rovinný graf, který má 40 vrcholů, 5 komponent souvislosti a neobsahuje C_3 jako podgraf.

Náčrt řešení.

(V PDF bez náčrtu řešení; náčrt níže je doplněný, vlastní.)

1. Pro souvislý rovinný graf $G = (V, E)$ s libovolným rovinným nakreslením a s stěnami platí Eulerova formule

$$|V| - |E| + s = 2.$$

Pro nesouvislý rovinný graf s c komponentami souvislosti platí zobecněná verze

$$|V| - |E| + s = 1 + c,$$

protože každá komponenta přidá svou „jedničku“, vnější stěnu si komponenty sdílí.

2. Použijeme nerovnost $|E| \leq 2|V| - 4$, která platí pro každou souvislou komponentu rovinného grafu *bez trojúhelníků* na $n_i \geq 3$ vrcholech (důsledek Eulerovy formule: každá stěna je ohraničena alespoň 4 hranami, takže $4s \leq 2|E|$, dosazením do $|V| - |E| + s = 2$ dostáváme $|E| \leq 2|V| - 4$). Pro komponentu na $n_i \in \{1, 2\}$ vrcholech je $|E_i| \leq n_i - 1 \leq 1$.

Obě meze shrneme jako $|E_i| \leq 2n_i - 2$ pro každou komponentu a $|E_i| \leq (2n_i - 2) - 2$, má-li komponenta aspoň 3 vrcholy. Komponent s aspoň 3 vrcholy je $t \geq 1$ (pět komponent po nejvýše 2 vrcholech by pokrylo jen 10 vrcholů). Sečtením přes všech 5 komponent

$$|E| \leq \sum_{i=1}^5 (2n_i - 2) - 2t = 80 - 10 - 2t = 70 - 2t \leq 68.$$

Hodnota $|E| = 80$ tedy *nemůže* být dosažena – takový graf **neexistuje**.

3. Z bodu (2) plyne, že maximální možný počet hran je $\boxed{68}$. Mez je dosažitelná: 4 izolované vrcholy + úplný bipartitní graf $K_{2,34}$ (36 vrcholů, $2 \cdot 34 = 68$ hran), který je rovinný (dva vrcholy nakreslíme nad a pod řadou 34 vrcholů) a jako bipartitní neobsahuje C_3 .

2 Souvislost grafů

(Reálná otázka: podzim 2023, č. 3 – Souvislost grafů)

Zadání.

Mějme graf G na 64 vrcholech, přičemž jeho vrcholy jsou označeny různými šesticemi nul a jedniček. Hrany tvoří:

- vrcholy, které se liší pouze v první souřadnici, např. 111010 a 011010 (tyto hrany tvoří perfektní párování),
- vrcholy, které mají první dva znaky totožné, např. 111010 a 110001, a také
- dvojice vrcholů (111010, 101100), (101100, 010110) a (010110, 111011).

Jiné dvojice vrcholů spojeny nejsou.

1. Vyslovte Mengerovu větu (o vrcholové souvislosti a řezech) včetně formálního zavedení potřebných pojmů.
2. Určete, kolik hranově disjunktních cest vede mezi vrcholy 000000 a 111111.
3. Nalezněte nejmenší hranový řez a nejmenší vrcholový řez oddělující 000000 a 111111.

Náčrt řešení.

(V PDF bez náčrtu řešení; rozbor níže je vlastní – ověřeno NetworkX výpočtem max-flow/min-cut.)

1. **Mengerova věta (vrcholová verze).** Buď $G = (V, E)$ graf a $u, v \in V$ dva různé nesousední vrcholy. *Vrcholový $u-v$ řez* je množina vrcholů $A \subseteq V \setminus \{u, v\}$ taková, že v indukovaném podgrafu $G[V \setminus A]$ neexistuje cesta z u do v . Dvě $u-v$ cesty jsou *vrcholově disjunkt*, pokud nemají žádný společný vnitřní vrchol. Pak: *maximální počet vrcholově disjunktích $u-v$ cest je roven minimální velikosti vrcholového $u-v$ řezu.* Analogická hranová verze (bez předpokladu nesousednosti) platí pro hranové řezy a hranově disjunktí cesty.
2. **Topologický rozbor grafu.** Označme $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$ čtyři skupiny vrcholů podle prvních 2 bitů (každá po 16 vrcholech).
 - Hrany (a) jsou perfektní párování přes 1. bit – spojují $0\beta \leftrightarrow 1\beta$ a zachovávají 2. bit. Tedy (a)-hrany jdou *jen* mezi $S_{00} \leftrightarrow S_{10}$ a $S_{01} \leftrightarrow S_{11}$. **Mezi $\{S_{00}, S_{10}\}$ a $\{S_{01}, S_{11}\}$ žádná hrana (a) nevede.**
 - Hrany (b) zůstávají uvnitř každé skupiny (K_{16}).
 - Hrany (c) jsou jediné, které propojují dvojice přes 2. bit:
 - $\{111010, 101100\}$: $S_{11} \leftrightarrow S_{10}$ (přes vrchol $101100 \in S_{10}$);
 - $\{101100, 010110\}$: $S_{10} \leftrightarrow S_{01}$ (přes 101100);
 - $\{010110, 111011\}$: $S_{01} \leftrightarrow S_{11}$ (přes $010110 \in S_{01}$).

Klíčové pozorování (úzké hrdlo). $u = 000000 \in S_{00}$, $v = 111111 \in S_{11}$. Z dvojice $\{S_{00}, S_{10}\}$ se do dvojice $\{S_{01}, S_{11}\}$ (kde leží v) lze dostat *pouze* hranou (c), jejíž jeden konec leží v $\{S_{00}, S_{10}\}$. Takové hrany jsou jen dvě: $\{101100, 111010\}$ a $\{101100, 010110\}$ – **obě procházejí vrcholem 101100**. Třetí hrana (c) má oba konce v $\{S_{01}, S_{11}\}$ a pro náš přechod neslouží.

Min vrcholový řez = 1, realizovaný $A = \{101100\}$. Po odebrání 101100 z G zbude mezi $\{S_{00}, S_{10}\}$ a $\{S_{01}, S_{11}\}$ jediná hrana (c) $\{010110, 111011\}$. Ale ze S_{00} (kde leží u) se do vrcholu $010110 \in S_{01}$ nedostaneme: žádná (a), (b) ani (c) hrana nevede ze S_{00} do S_{01} . Tedy u je odpojen od v .

Max počet vrcholově disjunktích $u-v$ cest = **1**; např.:

$$000000 \xrightarrow{(a)} 100000 \xrightarrow{(b)} 101100 \xrightarrow{(c)} 111010 \xrightarrow{(b)} 111111.$$

Min hranový řez = 2, realizovaný 2 hranami (c) incidentními s 101100 :

$$R = \{\{101100, 111010\}, \{101100, 010110\}\}.$$

Po jejich odebrání zbude jen třetí (c)-hrana $\{010110, 111011\}$, opět nedosažitelná ze S_{00} .

Max počet hranově disjunktích $u-v$ cest = **2**; např.:

$$\begin{aligned} P_1 : 000000 &\xrightarrow{(a)} 100000 \xrightarrow{(b)} 101100 \xrightarrow{(c)} 111010 \xrightarrow{(b)} 111111, \\ P_2 : 000000 &\xrightarrow{(b)} 001100 \xrightarrow{(a)} 101100 \xrightarrow{(c)} 010110 \xrightarrow{(a)} 110110 \xrightarrow{(b)} 111111. \end{aligned}$$

Obě cesty procházejí vrcholem 101100 (vrcholově nejsou disjunkt), ale použité hrany se neopakují. 3. cesta hranově disjunkt s P_1, P_2 neexistuje: z 101100 vedou jen 2 hrany (c) do druhé poloviny grafu, a obě jsou již použité v P_1, P_2 .

3. **Závěr.** Nejmenší hranový řez má velikost **2**, nejmenší vrcholový řez má velikost **1** (viz konstrukce v bodě 2).

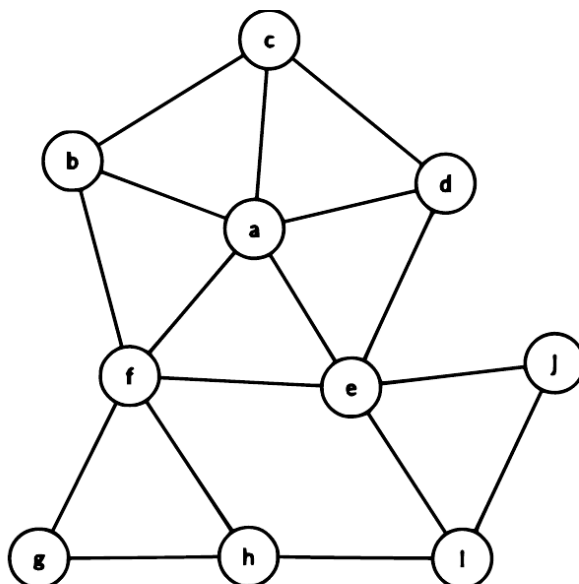
Poznámka. Naivní odhad podle stupně $\deg(u) = \deg(v) = 16$ je v této úloze *daleko* od reality. Skutečnou souvislost mezi u a v limituje úzké hrdlo (1 vrchol, 2 hrany). Pointou úlohy je topologický rozbor, ne mechanická aplikace stupně.

3 Barevnost grafů

(Reálná otázka: podzim 2024, č. 4 – Barevnost grafů)

Zadání.

1. Definujte, co je barevnost grafu.
2. Jaké platí omezení pro barevnosti rovinných grafů?
3. Určete barevnost grafu na obrázku níže.



Náčrt řešení.

- Barevnost grafu je minimální počet barev, kterými lze obarvit vrcholy grafu tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. Formálně, dobré obarvení grafu G k barvami je funkce $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, kde V je množina vrcholů grafu, splňující $f(u) \neq f(v)$ pro každé dva sousední vrcholy $u, v \in V$, a barevnost grafu $\chi(G)$ je nejmenší k , pro které existuje dobré obarvení G k barvami.
- Pro rovinné grafy platí, že jejich barevnost je nejvýše 4 a tento odhad je těsný.
- Barevnost grafu na obrázku je 4. Horní odhad lze nahlédnout buď z věty výše (graf je rovinný), nebo konstruktivně: pro vrcholy s písmeny $a, b, \dots, j$ lze použít barvy v pořadí 4, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 4, 3 (přesné znění oficiálního náčrtu). Dolní odhad vyplývá z toho, že graf na obrázku má jako podgraf 5-cyklos s připojeným univerzálním vrcholem a protože 5-cyklos má barevnost 3, musí mít graf na obrázku barevnost alespoň 4.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu):

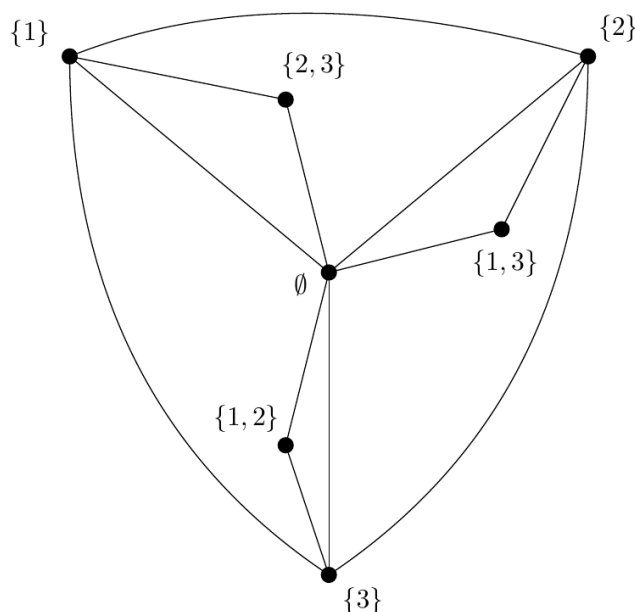
- *Který podgraf.* Vrchol a sousedí s b, c, d, e, f a tyto vrcholy tvoří kružnici $b c d e f b$ (hrany bc, cd, de, ef, fb). Je to tedy kolo W_5 se středem a .
- *Proč 4 barvy.* Lichá kružnice C_5 se dvěma barvami obarvit nedá (barvy by se musely střídát, a to u liché délky nejde), potřebuje tedy aspoň 3 barvy. Střed a sousedí se všemi pěti vrcholy kružnice, musí proto dostat barvu různou od všech tří použitých, celkem aspoň 4. Pozor: klikovost grafu je jen 3, dolní odhad tu nedává klika, ale lichá kružnice se středem.
- *Ověřeno programem:* uvedené obarvení je dobré a 3-obarvení neexistuje.

4 Eulerovské grafy

(Reálná otázka: jaro 2025, č. 4 – Eulerovské grafy)

Zadání.

Nechť n je přirozené číslo větší než 1. Definujeme graf G_n takto: jeho vrcholy jsou všechny množiny $A \subset \{1, \dots, n\}$, pro něž platí $|A| < n$. Dvě (různé) z nich jsou spojeny hranou právě tehdy, když jsou disjunktní. Například pro $n = 3$ dostaneme tento graf:



1. Pro která $n > 1$ je graf G_n souvislý?
2. Nechť $A \subset \{1, \dots, n\}$ je množina velikosti menší než n . Jaký je stupeň vrcholu, který odpovídá množině A ? (Závisí nějak na velikosti množiny A , na n , nebo případně na něčem jiném)?
3. Formulujte, co znamená pojem eulerovský graf a rozhodněte pro která $n > 1$ je graf G_n eulerovský?

Odpovědi přiměřeně zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. Vrchol odpovídající $\emptyset$ je spojen se všemi ostatními vrcholy grafu, takže graf je souvislý vždy.
2. Je-li $|A| = k > 0$, je odpovídající vrchol spojen se všemi vrcholy z podmnožin $\{1, \dots, n\} \setminus A$ a má tak stupeň 2^{n-k} . Pro $A = \emptyset$ je stupeň $2^n - 2$ (chybí hrany do $\emptyset$ a $\{1, \dots, n\}$) a tedy všechny vrcholy mají sudé stupně.
3. Graf je eulerovský pro všechna $n > 1$ dle Eulerovy věty: G (bez izol. vrcholů) je eulerovský $\iff G$ souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu):

- Pojem (bod 3 chce i definici). Graf je eulerovský, má-li uzavřený tah (sled bez opakování hran), který obsahuje každou hranu grafu právě jednou; vrcholy se v něm opakovat smějí.

- *K bodu 2.* Pro $|A| = k$, $1 \leq k \leq n-1$, jsou sousedé A právě podmnožiny $B \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus A$. Všechny jsou vrcholy grafu ($|B| \leq n-k < n$) a žádná z nich není rovna A (disjunktní s neprázdnou A), proto $\deg(A) = 2^{n-k}$. Protože $k < n$, je $n-k \geq 1$ a stupeň je sudý. Stupeň $2^n - 2$ vrcholu $\emptyset$ je sudý pro každé $n \geq 2$.
- *Ověřeno programem* pro $n = 2, \dots, 6$: souvislost, stupně i eulerovskost.

5 Rovinné grafy

(Reálná otázka: jaro 2026, č. 4 – Rovinné grafy)

Zadání.

1. Uveďte Eulerovu formuli pro rovinné grafy (o počtu vrcholů, hran a stěn).
2. Uvažujme vrcholově 2-souvislý rovinný graf, který má rovinné nakreslení, jehož každá vnitřní stěna je trojúhelník (je ohraničena kružnicí C_3), vnější stěna může, ale nemusí být ohraničena C_3 . Jaký je minimální a maximální počet hran takového grafu, pokud víme, že má $n \geq 3$ vrcholů? Odpověď přiměřeně zdůvodněte.
3. Rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje rovinný graf s $2n$ vrcholy takový, že n z nich má stupeň 3 a zbývajících n má stupeň 4. Odpověď přiměřeně zdůvodněte.

Náčrt řešení.

1. Je-li $G = (V, E)$ souvislý rovinný graf a s počet stěn nějakého jeho rovinného nakreslení, pak $|V| - |E| + s = 2$.
2. Z 2-souvislosti plyne, že každá stěna je ohraničena kružnicí a každá hrana leží na hranici 2 různých stěn. Je-li vnější stěna ohraničena kružnicí C_k ($3 \leq k \leq n$), máme $2|E| = 3(s-1) + k$. Použitím Eulerovy formule dostáváme $|E| = 3n - 3 - k$.

Maxima se nabývá v případě, že i vnější stěna je ohraničena C_3 a to $3n - 6$ hran. Minima pak pro vnějškově rovinný graf, který je vnitřně triangulovaný. Ten má $2n - 3$ hran.

3. Protože graf obsahuje vrchol stupně 4, musí mít alespoň 5 vrcholů a $n \geq 3$. Z principu sudosti plyne, že má $\frac{3n+4n}{2}$ hran a tedy n musí být sudé.

Dokázat, že pro všechna sudá $n \geq 4$ takový graf existuje lze konstrukcí. Rovinnost nepřidává žádné další omezení, jen je třeba ji zohlednit při konstrukci. Pozor, konstrukce musí být dostatečně obecná, ne jen pro několik menších případů n .

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu):

- *K bodu 2.* Obě meze se nabývají: pro $k = 3$ triangulace (např. K_4 pro $n = 4$), pro $k = n$ třeba „vějíř“ – kružnice $v_1 v_2 \dots v_n$ doplněná o hrany $v_1 v_3, \dots, v_1 v_{n-1}$, tj. triangulovaný mnohoúhelník s $n + (n-3) = 2n - 3$ hranami. Hodnota $k \leq n$ platí, protože vnější kružnice nemůže mít víc vrcholů, než má graf.
- *K bodu 3, obecná konstrukce.* Pro sudé $n \geq 4$ vezmeme hranol nad C_n : kružnice $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ a $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ a hrany $a_i b_i$. Je rovinný (vnější kružnice a_i , vnitřní b_i), má $2n$ vrcholů a je 3-regulární; jeho boční stěny jsou čtyřúhelníky $a_i a_{i+1} b_{i+1} b_i$ (indexy modulo n). Pro $i = 0, 2, \dots, n-2$ přidáme do stěny i diagonálu $a_i b_{i+1}$. Tyto stěny jsou po dvou vrcholově disjunktní, takže přesně n konců diagonál má stupeň 4 a zbylých n vrcholů stupeň 3. Diagonály vedou uvnitř svých stěn, rovinnost se zachová. (Ověřeno programem pro sudá $n \leq 20$: rovinnost i stupně.)