

Teorie grafů

Studijní materiál ke státnicím (M4)

Jakub Klesa

Pokryté předměty: NDMI002 (Diskrétní matematika), NDMI011 (Kombinatorika a grafy 1)

Obsah

Úvod	1
1 Základní pojmy, izomorfismus, stupeň vrcholu	2
1.1 Základní rodiny grafů	2
1.2 Podgraf, izomorfismus, doplněk	3
1.3 Bipartitní graf	4
1.4 Stupeň vrcholu, princip sudosti	4
2 Souvislost, komponenty, vzdálenost	5
2.1 Eulerovský tah (vsuvka pro řešený příklad)	6
3 Stromy a jejich charakteristiky	7
4 Rovinné grafy (Eulerova formule)	8
4.1 Maximální počet hran rovinného grafu	10
5 Barevnost grafů	13
5.1 Vztah barevnosti a klikovosti	13
6 Hranová a vrcholová souvislost (Mengerova věta)	15
6.1 Mengerova věta	16
7 Orientované grafy, silná a slabá souvislost	18
8 Toky v sítích (Ford-Fulkerson)	19
8.1 Síť, tok, řez	19
8.2 Ford-Fulkersonův algoritmus	21
8.3 Shrnutí toků	22
Shrnutí	22
Zdroje	24

Úvod

Tento materiál pokrývá okruh **M4 – Teorie grafů** (předměty NDMI002 *Diskrétní matematika* a NDMI011 *Kombinatorika a grafy 1*). Výklad jádra okruhu (základní pojmy, stromy, rovinné nakreslení, barevnost, orientované grafy) stojí na zápiscích T. Slámy z přednášky doc. Martina Mareše (NDMI002) a na učebnici

J. Matouška a J. Nešetřila *Kapitoly z diskrétní matematiky* (anglické vydání *Invitation to Discrete Mathematics*), kterou jako literaturu k oběma předmětům doporučují jejich přednášející. Pro míru souvislosti, Mengerovu větu a toky v sítích vycházíme ze skript T. Vally a J. Matouška *Kombinatorika a grafy I* (NDMI011). Značení a hloubka odpovídají kurzu pro informatiky.

U Eulerovy formule ($n - m + s = 2$) a navazující horní meze na počet hran rovinného grafu ($m \leq 3n - 6$) požadavky okruhu výslovně uvádějí důkaz, proto je strukturovaně provedeme. Ostatní důkazy v textu jsou krátké, nepovinné a označené jako takové. Existenci maximálního toku uvádíme *bez důkazu* (jak je v požadavcích) a Mengerovu větu se zněním a s principem důkazu (převod na toky, pojmy v sekci 8). Do výkladu je zařazeno všech pět reálných otázek SZS k okruhu z let 2023–2026; pohromadě jsou i v samostatném dokumentu *Příklady otázek*. Použité zdroje jsou uvedeny na konci.

Značení. Graf píšeme $G = (V, E)$, kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran (neorientované, bez násobnosti a smyček, není-li řečeno jinak). Hrana mezi u, v je $\{u, v\}$ nebo zkráceně uv ; pak říkáme, že u a v jsou *sousední*. Počet vrcholů značíme $n = |V|$, počet hran $m = |E|$. Stupeň vrcholu je $\deg_G(v)$, vzdálenost $\text{dist}_G(u, v)$ (případně bez indexu, je-li G jasné). Barevnost grafu je $\chi(G)$, klikovost $\omega(G)$. Pro orientovaný graf používáme šipky (u, v) pro hranu z u do v . Symbolem $[n]$ míníme $\{1, 2, \dots, n\}$.

1 Základní pojmy, izomorfismus, stupeň vrcholu

Začínáme od definice grafu a hned se podíváme na základní rodiny (úplný, bipartitní, cesta, kružnice). Pak zavedeme stupeň a uvidíme *princip sudosti* – první netriviální tvrzení teorie grafů, na které se v dalších kapitolách často odkazujeme.

 **Video:** *Reducible*, Introduction to Graph Theory: A Computer Science Perspective (vizuální úvod: základní pojmy, typy grafů a motivace, proč teorii grafů studovat).

Definice – Graf

Graf je dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná neprázdná množina (vrcholy) a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina (hran); každá hrana je tedy dvouprvková podmnožina V . Pro hranu $e = \{u, v\}$ říkáme, že u a v jsou *sousední* (zapisujeme $u \sim v$) a že u, v leží na hraně e .

 **Poznámka.** Jde o tzv. *jednoduchý neorientovaný graf*: žádné smyčky ani vícenásobné hrany. *Orientovaný graf* (uspořádané dvojice vrcholů místo neuspořádaných) zavedeme samostatně v sekci 7. *Multigrafy* (s násobnými hranami a smyčkami) v tomto materiálu nepoužíváme.

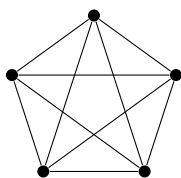
1.1 Základní rodiny grafů

Čtyři rodiny, které poznáme na první pohled a používáme jako stavební kameny i jako testovací příklady:

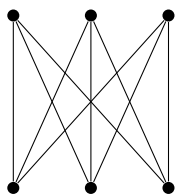
Definice – Úplný, úplný bipartitní, cesta, kružnice

- (1) *Úplný graf* K_n má $V = [n]$ a $E = \binom{[n]}{2}$, tj. všechny možné hrany.
- (2) *Úplný bipartitní graf* $K_{m,n}$ má $V = A \cup B$, kde $|A| = m$, $|B| = n$ a $A \cap B = \emptyset$, a hrany jsou všechny dvojice $\{a, b\}$ s $a \in A$, $b \in B$.
- (3) *Cesta* P_n délky n má vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_n$ ($n + 1$ vrcholů) a hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$ pro $0 \leq i < n$.
- (4) *Kružnice* C_n ($n \geq 3$) má vrcholy $v_0, \dots, v_{n-1}$ a hrany $\{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$.

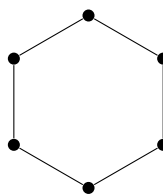
 **Poznámka.** Někteří autoři značí P_n „cestu s n vrcholy“ (tj. $n - 1$ hran). My držíme značení Matouška a Nešetřila „cesta délky n “ = n hran (tedy $n + 1$ vrcholů). Při výpočtech vždy uvedeme, kolik má cesta vrcholů a hran, aby nedošlo k záměně.



K_5



$K_{3,3}$



C_6



P_5

1.2 Podgraf, izomorfismus, doplněk

Definice – Podgraf, indukovaný podgraf

Graf H je *podgraf* grafu G , značíme $H \subseteq G$, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Pokud navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$ (tj. máme *všechny* hrany G mezi vrcholy $V(H)$), je H *indukovaný podgraf* grafu G , značíme $H = G[V(H)]$.

Intuice. Podgraf vznikne odebráním vrcholů *a/nebo* hran; indukovaný podgraf vznikne odebráním *jen* vrcholů (a s nimi automaticky všech hran, které do nich vedou). Indukovaný podgraf je tedy striktnější – nedovolí „prořezat“ hrany uvnitř už ponechané množiny vrcholů.

Definice – Izomorfismus grafů

Grafy G a H jsou *izomorfní*, značíme $G \cong H$, pokud existuje bijekce $f : V(G) \rightarrow V(H)$ taková, že pro každé $u, v \in V(G)$ platí

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

Intuice. Izomorfismus = „přejmenování vrcholů“. Dva grafy jsou izomorfní, právě když mají *tutěž strukturu sousedství*, jen jejich vrcholy se možná jmenují jinak. Hledat izomorfismus mezi konkrétními grafy je obecně výpočetně nelehké, ale rychle se vylučuje porovnáváním invariantů (počet vrcholů, počet hran, posloupnost stupňů, počet trojúhelníků, ...).

Příklad – Vyloučení izomorfismu invariantem

Zadání. Jsou grafy $G_1 = C_4$ (4-cyklus) a $G_2 = K_{1,3}$ (hvězda se 3 listy) izomorfní?

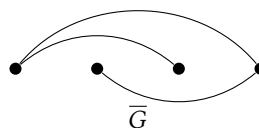
Řešení. Oba mají 4 vrcholy, ale C_4 má 4 hrany, kdežto $K_{1,3}$ jen 3. Počet hran je invariant a hned vylučuje izomorfismus: $4 \neq 3$, tedy $G_1 \not\cong G_2$. (Pro doplnění: posloupnost stupňů C_4 je $(2, 2, 2, 2)$, posloupnost stupňů $K_{1,3}$ je $(3, 1, 1, 1)$, ta také rozhoduje.)

Definice – Doplněk grafu

Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ na stejných vrcholech, kde hranami jsou *právě ty* dvojice vrcholů, které v G hranou nejsou.



G (cesta P_3)



$\bar{G}$

i Poznámka. Doplněk $\overline{K_n}$ je *diskrétní graf* (žádné hrany), $\overline{P_n}$ má $\binom{n+1}{2} - n$ hran. Pojem se hodí, když chceme nějaké tvrzení vyslovit pro „řídke“ grafy přes „husté“ a obráceně.

1.3 Bipartitní graf

Definice – Bipartitní graf

Graf $G = (V, E)$ je *bipartitní*, pokud existuje rozklad $V = A \cup B$ ($A \cap B = \emptyset$) takový, že každá hrana má jeden konec v A a druhý v B . Dvojici (A, B) říkáme *bipartice*. (V této konvenci je i graf bez hran bipartitní – konzistentní s pozdější ekvivalencí „ $\chi(G) \leq 2 \iff G$ bipartitní“.)

💡 Intuice. Bipartitní grafy modelují vztahy mezi dvěma různými typy objektů: studenti vs. semináře, zaměstnanci vs. směny, lidé vs. vlastnosti. Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ je „vše s vším mezi A a B “, obecný bipartitní graf je jeho libovolný podgraf.

★ Věta – Charakterizace bipartitnosti

Graf G je bipartitní, právě když neobsahuje lichou kružnici (tedy $\forall k \geq 1 : C_{2k+1} \not\subseteq G$).

💡 Intuice. „Pokud“ bipartitní s biparticí (A, B) : každá hrana mění stranu, kružnice tedy musí mít sudou délku. „Pokud“ bez liché kružnice: v každé souvislé komponentě zvolíme libovolný vrchol r za kořen a obarvíme každý vrchol v barvou podle parity vzdálenosti $\text{dist}(r, v)$. Kdyby nějaká hrana G spojovala dva vrcholy stejné barvy (stejně parity), vznikla by lichá kružnice – spor. (Tento argument formálně zopakujeme v sekci 5 o barevnosti, kde tvrzení přepíšeme jako „ $\chi(G) \leq 2$ “.)

1.4 Stupeň vrcholu, princip sudosti

Definice – Okolí a stupeň vrcholu

Pro $v \in V(G)$ je *okolí* $N_G(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$ množina jeho sousedů a *stupeň* $\deg_G(v) = |N_G(v)|$. Pokud mají všechny vrcholy stupeň k , je graf *k-regulární*.

★ Věta – Princip sudosti / „handshake lemma“

Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Zejména je počet vrcholů lichého stupně sudý.

Důkaz (nepovinný – dvojí počítání). Spočítáme dvěma způsoby velikost množiny K všech dvojic $(v, e) \in V \times E$ takových, že $v \in e$. Jednak je každá hrana e uspořádanou dvojicí počítána dvakrát (jednou za každý ze svých dvou konců), takže $|K| = 2|E|$. Jednak každý vrchol v přispívá tolikrát, kolik je jeho stupeň, takže $|K| = \sum_v \deg(v)$. Druhá část (sudý počet lichých stupňů) plyne okamžitě: levá strana je sudá, tedy součet „lichých“ sčítanců musí být sudý, a to znamená, že lichých sčítanců je sudý počet. $\square$

💡 Intuice. Princip sudosti = „sečteme-li, kolikrát si kdo na večírku podal ruku, vyjde sudé číslo“ (každé podání rukou počítáme dvakrát, u každého účastníka jednou). Nejjednodušší, ale velmi mocný nástroj: rychle ukáže, že např. graf s posloupností stupňů $(1, 3, 3, 3, 3)$ neexistuje – součet je 13, lichý.

Příklad – Aplikace principu sudosti

Zadání. Existuje 3-regulární graf na 7 vrcholech?

Řešení. Kdyby existoval, byl by součet stupňů $7 \cdot 3 = 21$, ale podle principu sudosti musí být součet stupňů sudý. Spor. Takový graf tedy *neexistuje*. (Obecně: k -regulární graf na n vrcholech vyžaduje kn sudé, jinak nelze.)

2 Souvislost, komponenty, vzdálenost

Definice – Sled, cesta, kružnice v grafu

Sled (z u do v) v grafu G je posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ s $v_0 = u, v_k = v, v_i \in V, e_i \in E, e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. *Cesta* je sled, ve kterém se neopakují vrcholy (a tedy ani hrany). *Kružnice* (uzavřená cesta) je sled, kde $v_0 = v_k$ a jinak se vrcholy ani hrany neopakují, navíc s $k \geq 3$.

i Poznámka. Pokud existuje sled z u do v , existuje i *cesta* z u do v : stačí vzít nejkratší ze všech sledů z u do v – ten už se nemůže nikde opakovat (jinak by ho šlo zkrátit).

Definice – Souvislost a komponenty

Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje cesta z u do v . *Komponenta souvislosti* grafu G je maximální (vzhledem k inkluzi) souvislý podgraf G .

💡 Intuice. Relace „ u je dosažitelný z v “ je ekvivalence na $V(G)$ (reflexivita: cesta délky 0; symetrie: graf je neorientovaný, cestu obrátíme; tranzitivita: cesty $u \rightarrow v$ a $v \rightarrow w$ se napojí a případně zkrátí na cestu $u \rightarrow w$). Třídy této ekvivalence jsou přesně *vrcholové množiny komponent souvislosti*. Souvislý graf má jednu komponentu.

Definice – Vzdálenost v grafu

V souvislém grafu G je *vzdálenost* vrcholů u, v definována jako délka nejkratší cesty z u do v a značíme $\text{dist}_G(u, v)$. Není-li G souvislý a u, v jsou v různých komponentách, klademe $\text{dist}_G(u, v) = \infty$.

i Poznámka. Vzdálenost je metrika – splňuje:

- (1) $\text{dist}(u, v) \geq 0$;
- (2) $\text{dist}(u, v) = 0 \iff u = v$;
- (3) $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u)$;
- (4) $\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, w) + \text{dist}(w, v)$ (trojúhelníková nerovnost – spojení dvou cest dá sled, ten zkrátíme na cestu, která rozhodně není delší).

Příklad – Souvislost a vzdálenost v krychli Q_3

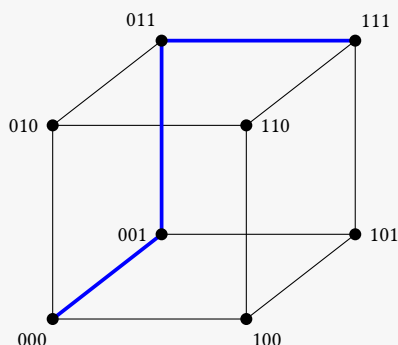
Zadání. Krychle Q_3 má za vrcholy všechny trojice $\{0, 1\}^3$ (osm vrcholů 000, 001, ..., 111) a hrany spojují dvojice lišící se přesně v jedné souřadnici.

- (1) Kolik má Q_3 komponent souvislosti?
- (2) Jaká je vzdálenost vrcholů 000 a 111?

Řešení.

- (1) Mezi libovolnými dvěma vrcholy se lze dostat cestou, která bit po bitu mění jeden bit na druhý (z abc do $a'b'c'$: pokud $a \neq a'$, změň a , pokud $b \neq b'$, změň b , atd.) – to je posloupnost vrcholů, kde dva sousední se liší v jednom bitu, tedy cesta. Q_3 má 1 komponentu (je souvislý).

- (2) Vzdálenost = délka nejkratší cesty = počet bitů, ve kterých se vrcholy liší. Mezi 000 a 111 se liší 3 bity, $\text{dist}(000, 111) = 3$. (Obecně $\text{dist}(u, v)$ v Q_d = Hammingova vzdálenost u a v .)



Krychle Q_3 : vrcholy jsou binární řetězce 000–111, hrana = změna jednoho bitu. Vzdálenost dvou vrcholů = počet bitů, ve kterých se liší (Hammingova vzdálenost); modře vyznačena nejkratší cesta $000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 111$ délky 3. (Obecně je Q_d d -rozměrná hyperkrychle; pro $d = 3$ je to obyčejná krychle.)

2.1 Eulerovský tah (vsuvka pro řešený příklad)

Eulerovský tah není v hlavní osnově okruhu, ale objevuje se v jedné reálné SZZ otázce a jeho charakterizace je rychlá; uvedeme ji proto v krátkosti zde, mezi souvislostí a stromy.

Definice – Tah a eulerovský tah/graf

Tah v grafu G je sled, ve kterém se neopakují *hrany* (vrcholy se opakovat smí). *Uzavřený eulerovský tah* je tah, který začíná i končí ve stejném vrcholu a obsahuje *každou hranu grafu právě jednou*; vrcholy v něm leží libovolněkrát. Graf, který má uzavřený eulerovský tah, je *eulerovský*.

i Poznámka. Z definice plyne, že eulerovský tah projde každým vrcholem, na kterém leží alespoň jedna hrana – ale ne nutně právě jednou; např. „bowtie“ (dva trojúhelníky sdílející středový vrchol v_1) má eulerovský tah $v_1 v_2 v_3 v_1 v_4 v_5 v_1$ s v_1 třikrát. Izolované vrcholy se eulerovským tahem pokrytý nedají; navazující věta proto izolované vrcholy explicitně vylučuje.

★ Věta – Charakterizace eulerovských grafů

Graf G (bez izolovaných vrcholů) má uzavřený eulerovský tah, právě když je souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.

💡 Intuice. „Pokud existuje“: tahem se každý vrchol musí navštívit (souvislý); kdykoli do vrcholu vejde jednou hranou, musíme jinou hranou vyjít – hrany se v daném vrcholu *párují* a jejich celkový počet je sudý. „Naopak“: vezmeme nejdelší tah. Kdyby nebyl uzavřený, použil by v koncovém vrcholu lichý počet hran; ten má ale sudý stupeň, vede z něj tedy ještě nepoužitá hrana a tah jde prodloužit – spor. Uzavřený tah, který nepokrývá všechny hrany, má díky souvislosti na některém svém vrcholu nepoužitou hranu; tah „rozpojíme“ v tomto vrcholu a hranu přidáme – opět delší tah, spor s maximalitou.

Příklad – SZZ jaro 2025 č. 4: Eulerovskost na grafu disjunktních podmnožin

(Reálná otázka SZZ: jaro 2025, č. 4 – Eulerovské grafy)

Zadání. Pro $n > 1$ je G_n graf, jehož vrcholy jsou vlastní podmnožiny $A \subseteq [n]$ (tj. $|A| < n$, takže $[n]$ samo není vrchol; $\emptyset$ je vrchol), a dva různé vrcholy A, B jsou spojeny hranou právě tehdy, když $A \cap B = \emptyset$.

- (1) Pro která $n > 1$ je G_n souvislý?
- (2) Jaký je stupeň vrcholu A (závisí na $|A|, n, \dots$)?
- (3) Pro která $n > 1$ je G_n eulerovský?

Obrázek G_3 v příklady/q_2025-jaro-04_eulerovske-grafy.tex.

Řešení.

- (1) **Souvislost.** Vrchol $\emptyset$ je disjunktní s každou jinou množinou, je tedy sousedem všech ostatních vrcholů. Z libovolného vrcholu $A \neq \emptyset$ se tak do libovolného $B \neq \emptyset$ dostaneme cestou $A \rightarrow \emptyset \rightarrow B$. **Graf G_n je souvislý pro každé $n > 1$.**
- (2) **Stupeň vrcholu A .** Rozlišíme případy podle velikosti A :
 - **Případ $A \neq \emptyset, |A| = k, 1 \leq k \leq n - 1$.** Soused B je každá množina disjunktní s A a různá od A . Disjunktní s A znamená $B \subseteq [n] \setminus A$ (komplement velikosti $n - k$), takových podmnožin je 2^{n-k} . Z nich vyloučíme $B = A$, ale to v komplementu vůbec není (protože $A \cap ([n] \setminus A) = \emptyset$, takže $A \subseteq [n] \setminus A$ by znamenalo $A = \emptyset$). Tedy $\deg(A) = 2^{n-k} - 1$, což je sudé, protože $n - k \geq 1$.
 - **Případ $A = \emptyset$.** Soused je každá neprázdná vlastní podmnožina $[n]$, tj. $B \neq \emptyset$ a $B \subseteq [n]$. Vlastních podmnožin $[n]$ je $2^n - 1$ (všech podmnožin je 2^n , vyloučíme $[n]$); z nich vyloučíme samotnou $\emptyset$ (vrchol $A = \emptyset$ sám sobě sousedem není). Dostáváme $\deg(\emptyset) = 2^n - 2$, což je sudé.

Závěr: všechny stupně jsou sudé pro každé $n > 1$.
- (3) **Eulerovskost.** Graf G_n je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň, takže podle charakterizace eulerovských grafů je G_n **eulerovský pro každé $n > 1$.**

3 Stromy a jejich charakteristiky

Strom je nejmenší souvislý graf, a zároveň největší acyklický graf – přesně tato „extremální poloha“ dává ekvivalentní charakteristiky. V důkazu hraje klíčovou roli *list* – vrchol stupně 1.

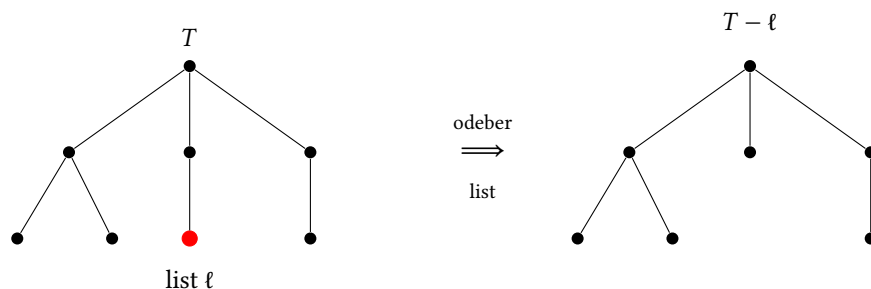
Definice – Strom, les, list

Graf G je *strom*, je-li souvislý a acyklický (neobsahuje kružnici). *Les* je acyklický graf (komponenty lesa jsou stromy). Vrchol $v \in V(G)$ se stupněm $\deg(v) = 1$ se nazývá *list*.

★ Lemma – Strom má list

Každý strom s $|V| \geq 2$ vrcholy má alespoň dva listy.

Důkaz (nepovinný – podpůrné lemma pro indukce po stromě). Uvažme *nejdelší cestu* P v G , řekněme s konci u a v . Z u nemůže vést hrana do žádného vrcholu mimo P (jinak bychom P prodloužili), ani do žádného vnitřního vrcholu P (jinak bychom vytvořili kružnici a spor s acykličností). Jediná hrana z u tedy vede k jeho předchůdci na P , takže $\deg(u) = 1$, a stejně $\deg(v) = 1$. $\square$



Intuice. List je „rozpoznatelně periferní“ vrchol – má jediného souseda, takže odebrání listu strom nepoškodí: zbude opět strom o jeden vrchol a jednu hranu menší. Tato operace je páteří všech indukcí o stromech.

★ Věta – Ekvivalentní charakteristiky stromu

Pro graf G jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (1) G je souvislý a acyklický (standardní definice);
- (2) mezi každými dvěma vrcholy vede *právě jedna* cesta (jednoznačná souvislost);
- (3) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany nesouvislý (minimálně souvislý);
- (4) G je acyklický a přidáním libovolné nové hrany vznikne kružnice (maximálně acyklický);
- (5) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Poznámka. *Princip důkazu.* Implikace (1) $\Rightarrow$ (5) se vede indukcí přes „odtrhni list“ (viz důsledek níže). Obráceně z (5) (souvislý, $m = n - 1$) plyne (1) takto: kdyby G obsahoval kružnici, odebráním jedné její hrany bychom dostali souvislý graf s $n - 2$ hranami – spor s tím, že souvislý graf na n vrcholech má alespoň $n - 1$ hran (kostra je strom). Ekvivalence s (2)–(4) plynou z (1) krátkými úvahami: dvě různé cesty mezi týmiž vrcholy by daly kružnici, takže (1) $\Rightarrow$ (2); hrana stromu je jedinou cestou mezi svými konci, takže její odebrání rozpojí graf (3); přidaná hrana uv uzavře kružnici s jedinou cestou z u do v (4). Zpětné implikace se dokazují podobně sporem.

★ Důsledek – Počet hran stromu

Strom na $n \geq 1$ vrcholech má přesně $n - 1$ hran. Les o n vrcholech a k komponentách má $n - k$ hran.

Intuice. „Strom má $n - 1$ hran“ je tak důležitý a tak často používaný fakt, že stojí za zvláštní zapamatování. Důkaz indukcí: $n = 1$ má 0 hran. Pro $n \geq 2$ vezmeme list ℓ , odtrhneme ho ($G - \ell$ je strom na $n - 1$ vrcholech), použijeme indukční předpoklad ($n - 2$ hran) a hranu k listu přidáme zpět: $n - 1$ hran.

🔧 Příklad – Stromy a počet hran v lese

Zadání. Les má $n = 20$ vrcholů a 5 komponent. Kolik má hran?

Řešení. Každá komponenta lesa je strom; je-li i -tá komponenta na n_i vrcholech, má $n_i - 1$ hran. Celkem $\sum (n_i - 1) = n - 5 = 15$ hran.

4 Rovinné grafy (Eulerova formule)

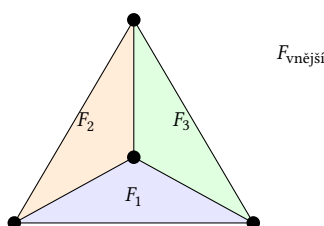
Rovinný graf je graf, který umíme bez křížení nakreslit do roviny. Nakreslení rozdělí rovinu na *stěny* (oblasti) a pro každé takové nakreslení platí *Eulerova formule* $n - m + s = 2$, která svazuje počty vrcholů, hran a stěn. Důkaz Eulerovy formule výslovně uvádějí požadavky okruhu, proto ho níže provedeme po krocích.

Definice – Rovinný graf, rovinné nakreslení, stěny

Rovinné nakreslení grafu $G = (V, E)$ je přiřazení každému vrcholu bodu v $\mathbb{R}^2$ a každé hraně $\{u, v\} \in E$ jednoduchého oblouku s konci v obrazech u a v tak, že dvě různé hrany se protínají nejvýše ve společných koncích. *Rovinný graf* je takový graf, pro který existuje alespoň jedno rovinné nakreslení. *Stěny* nakreslení jsou souvislé komponenty doplňku obrazu vrcholů a hran v $\mathbb{R}^2$; právě jedna stěna je neomezená – nazývá se *vnější*, ostatní jsou *vnitřní*.

📺 **Video:** Wrath of Math, What are Planar Graphs? (definice rovinného grafu, rovinného nakreslení a stěn).

Poznámka. Existují grafy, které rovinné nejsou. Klasickými minimálními neplanárními grafy jsou K_5 a $K_{3,3}$; Kuratowského věta říká, že graf je neplanární právě tehdy, obsahuje-li podgraf, který je dělením některého z těchto dvou. (V požadavcích M4 není; uvádíme jen jako kontext.)



Rovinné nakreslení K_4 : $n = 4$, $m = 6$, $s = 4$, ověřujeme $n - m + s = 4 - 6 + 4 = 2$.

★ Věta – Eulerova formule

Pro každý souvislý rovinný graf $G = (V, E)$ s libovolným rovinným nakreslením platí

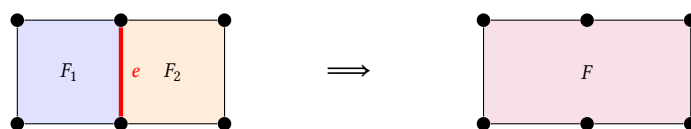
$$n - m + s = 2,$$

kde $n = |V|$, $m = |E|$ a s je počet stěn (vnitřních i vnější).

Důkaz (indukcí podle počtu hran). Fixujeme počet vrcholů n a indukujeme přes počet hran m . Souvislost je předpoklad.

- (1) **Báze.** Nejmenší souvislý graf na n vrcholech je strom: $m = n - 1$ a stěn je $s = 1$ (jen vnější – nakreslení stromu „neuzavírá“ žádnou omezenou oblast). Pak $n - m + s = n - (n - 1) + 1 = 2$.
- (2) **Indukční krok.** Nechť G je souvislý a $m > n - 1$, tedy obsahuje kružnici. Vyber hranu e , která leží na nějaké kružnici, a označ $G' = G - e$. Po odebrání e :
 - V se nemění: $n' = n$;
 - hran je o jednu méně: $m' = m - 1$;
 - dvě stěny, které sousedily přes e , se slévají v jednu (z Jordanovy věty: hrana e leží na kružnici, která odděluje svůj vnitřek od vnějšku; e tedy sousedí se dvěma *různými* stěnami, a po jejím odebrání se sloučí) – tedy $s' = s - 1$;
 - G' je stále souvislý: každá cesta v G procházející hranou e se dá nahradit obchvatem po zbytku kružnice, na které e leželo.

Z indukčního předpokladu pro G' máme $n' - m' + s' = 2$, tedy $n - (m - 1) + (s - 1) = n - m + s = 2$. □



Vlevo: G s hranou e na kružnici, stěny $F_1 \neq F_2$. Vpravo: $G - e$ – stěny F_1, F_2 se slévají v F , takže $s' = s - 1$.

💡 Intuice. Eulerova formule říká, že číslo $n - m + s$ je *topologický invariant* – nezáleží na konkrétním nakreslení, závisí jen na grafu (a souvislosti, abychom „nepřičítali“ stěny duplicitně). Pro nesouvislý graf s c komponentami platí $n - m + s = 1 + c$ (každá komponenta přidá svou „jedničku“, vnější stěnu si komponenty sdílí). To je užitečné při počítání s nesouvislými rovinnými grafy.

📺 **Video:** 3Blue1Brown, Euler's Formula and Graph Duality (důkaz Eulerovy formule přes dualitu a kostru – jiná cesta než indukce výše, tatáž věta).

4.1 Maximální počet hran rovinného grafu

Pro „velké“ rovinné grafy nesmí být příliš mnoho hran; přesně to formalizuje následující věta. V důkazu hraje hlavní roli pozorování, že každá stěna je ohraničena alespoň 3 hranami a každá hrana sousedí s nejvýše 2 stěnami. (Výjimkou je *most* – hrana, jejímž odebráním vzroste počet komponent souvislosti, ekvivalentně hrana neležící na žádné kružnici; ta v rovinném nakreslení sousedí s toutéž stěnou z obou stran, proto se v součtu $\sum_F \ell(F)$ počítá dvakrát.)

★ Věta – Maximální počet hran rovinného grafu

Pro každý jednoduchý rovinný graf G s $n \geq 3$ vrcholy a m hranami platí

$$m \leq 3n - 6.$$

Pokud G navíc neobsahuje žádný trojúhelník (např. je bipartitní), pak dokonce

$$m \leq 2n - 4.$$

Důkaz. Stačí ošetřit souvislý případ (přidáním hran se nerovnost zachovává, doplníme do souvislého). Mějme rovinné nakreslení.

Pro každou stěnu F označme $\ell(F)$ počet hran na její hranici (každou hranu, která se na hranici vyskytne dvakrát, např. ve stromu, počítáme dvakrát). Platí

$$\sum_F \ell(F) = 2m,$$

protože každá hrana sousedí z obou stran se stěnou (u mostu je to z obou stran táž stěna, a proto ho v ní počítáme dvakrát). Zároveň pro $n \geq 3$ je $\ell(F) \geq 3$ pro každou stěnu: obsahuje-li G kružnici, hranice každé stěny kružnici obsahuje a kružnice má aspoň 3 hrany; je-li G strom, má jedinou stěnu a $\ell = 2m = 2(n - 1) \geq 4$. Tedy

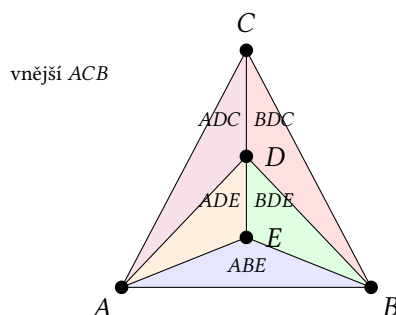
$$3s \leq \sum_F \ell(F) = 2m, \quad \text{tj.} \quad s \leq \frac{2m}{3}.$$

Dosazením do Eulerovy formule $n - m + s = 2$:

$$2 = n - m + s \leq n - m + \frac{2m}{3} = n - \frac{m}{3},$$

odkud $\frac{m}{3} \leq n - 2$, tedy $m \leq 3n - 6$.

Pokud G nemá trojúhelník, je $\ell(F) \geq 4$ (kružnice na hranici má délku aspoň 4, u stromu je $\ell = 2(n - 1) \geq 4$), takže $4s \leq 2m$, tj. $s \leq m/2$. Dosazením $2 \leq n - m + m/2 = n - m/2$ dostáváme $m \leq 2n - 4$. $\square$



Triangulace na $n = 5$ vrcholech: $m = 9 = 3n - 6$, $s = 6$ stěn (5 vnitřních + 1 vnější ACB), každá stěna je C_3 . Ověření Eulerovy formule: $n - m + s = 5 - 9 + 6 = 2$.

Intuice. Maxima dosahují tzv. *triangulace* – rovinné grafy, kde každá stěna (i vnější) je trojúhelník. Když máme jinou stěnu (delší kružnici), můžeme do ní přidat hranu a m tím zvýšit. Pro grafy *bez trojúhelníků* je horní mez $m \leq 2n - 4$ – a dobrým testem je, že nerovnost vyřazuje $K_{3,3}$ ($n = 6$, $m = 9 > 8 = 2n - 4$), což je v souladu s tím, že $K_{3,3}$ není rovinný. I mez $m \leq 2n - 4$ je nejlepší možná: rovnosti dosahuje např. rovinný bipartitní graf $K_{2,n-2}$ ($m = 2(n - 2) = 2n - 4$), obecně každý rovinný graf, jehož všechny stěny jsou čtyřúhelníky.

★ Důsledek – Existence vrcholu malého stupně

Každý rovinný graf má vrchol se stupněm nejvýše 5.

Důkaz (nepovinný – krátký důsledek $m \leq 3n - 6$). Pro $n \leq 2$ triviální. Pro $n \geq 3$: kdyby všechny stupně byly ≥ 6 , bylo by $2m = \sum \deg(v) \geq 6n$, takže $m \geq 3n > 3n - 6$ – spor s předchozí větou. $\square$

🔧 Příklad – SZZ jaro 2023 č. 4: Rovinný graf bez trojúhelníků

(Reálná otázka SZZ: jaro 2023, č. 4 – Rovinné grafy)

Zadání.

- (1) Uvedte Eulerovu formuli pro rovinné grafy.
- (2) Může existovat rovinný graf na 40 vrcholech s 80 hranami, 5 komponentami souvislosti a bez C_3 jako podgraf?
- (3) Určete maximální počet hran takového grafu (40 vrcholů, 5 komponent, bez C_3 , rovinný).

Řešení.

- (1) Pro souvislý rovinný graf platí $n - m + s = 2$; pro graf s c komponentami $n - m + s = 1 + c$.
- (2) Komponenty mají $n_1, \dots, n_5$ vrcholů, $\sum n_i = 40$. Komponenta na $n_i \geq 3$ vrcholech je souvislý rovinný graf bez trojúhelníků, takže $m_i \leq 2n_i - 4$. Komponenta na $n_i \in \{1, 2\}$ vrcholech má $m_i \leq n_i - 1 \leq 2n_i - 2$. Je-li $t \geq 1$ počet komponent s aspoň třemi vrcholy (aspoň jedna je, protože $40 > 5 \cdot 2$), dostáváme

$$m = \sum_i m_i \leq \sum_i (2n_i - 2) - 2t = 80 - 10 - 2t = 70 - 2t \leq 68.$$

Hodnota $m = 80$ tedy *nemůže* být dosažena – takový graf neexistuje.

- (3) Z (2) plyne $m \leq 68$ a rovnost vyžaduje $t = 1$ a čtyři izolované vrcholy (jen pro $n_i = 1$ je $n_i - 1 = 2n_i - 2$). Mez je dosažitelná: $K_{2,34}$ (36 vrcholů, $2 \cdot 34 = 68$ hran) je rovinný a bipartitní, tedy bez trojúhelníků; spolu se 4 izolovanými vrcholy dává 5 komponent. Maximum je 68 hran.

(Reálná otázka SZZ: jaro 2026, č. 4 – Rovinné grafy)

Zadání.

- (1) Uvedte Eulerovu formuli.
- (2) Pro 2-souvislý rovinný graf s vnitřními stěnami $= C_3$ určete minimální a maximální počet hran (pro $n \geq 3$ vrcholů).
- (3) Pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje rovinný graf s $2n$ vrcholy, kde n jich má stupeň 3 a n stupeň 4?

Řešení.

- (1) **Eulerova formule.** $n - m + s = 2$ pro souvislý rovinný graf.
- (2) **Minimální a maximální počet hran.** Použijeme dvě vlastnosti 2-souvislého rovinného grafu:
 - Každá stěna je ohraničena kružnicí (žádné „mosty“ a „slepé uličky“, které by mohly hranice protáhnout).
 - Každá hrana sousedí se dvěma různými stěnami (v 1-souvislém grafu by most mohl ležet na hranici stejné stěny dvakrát; ve 2-souvislém ne).

Z toho plyne dvojí počítání délek hranic stěn: každou hranu započítáme přesně dvakrát (jednou za každou ze dvou různých sousedních stěn). Je-li vnější stěna C_k (kružnice délky k , kde $3 \leq k \leq n$) a všechny vnitřní stěny jsou C_3 (těch je $s - 1$, protože vnější je jedna), pak

$$2m = 3(s - 1) + k.$$

Z Eulerovy formule $s = m - n + 2$. Dosadíme a vyjádříme m :

$$2m = 3(m - n + 2 - 1) + k = 3m - 3n + 3 + k \implies m = 3n - 3 - k.$$

Pro $k = 3$ (i vnější trojúhelník): $m = 3n - 6$ – klasické maximum (triangulace). Pro $k = n$ (vnější stěna C_n , vnitřek triangulovaný = vnějškově rovinný graf): $m = 2n - 3$ – minimum. **Celkem** $2n - 3 \leq m \leq 3n - 6$.

- (3) **Stupně 3 a 4 – pro která n ?** Princip sudosti dává $\sum \deg = 3n + 4n = 7n = 2m$, takže $7n$ musí být sudé, tedy n je sudé. Vrchol stupně 4 vyžaduje alespoň 5 vrcholů celkem, $2n \geq 5$, kombinací s paritou $n \geq 4$.

Konkrétní konstrukce pro $n = 4$ (tj. 8 vrcholů, 4 stupně 3, 4 stupně 4, $m = 14$): vezmeme krychli Q_3 (8 vrcholů $\{0, 1\}^3$, 12 hran, 3-regulární, rovinná) a přidáme do ní dvě *diagonály v dvojici protilehlých čtvercových stěn*. Konkrétně:

- diagonála $\{000, 011\}$ ve stěně tvořené vrcholy $\{000, 001, 011, 010\}$ (první bit = 0);
- diagonála $\{100, 111\}$ v opačné stěně $\{100, 101, 111, 110\}$ (první bit = 1).

Tyto dvě stěny nesdílí žádný vrchol. Konce obou diagonál (celkem 4 různé vrcholy: 000, 011, 100, 111) získají +1 ke stupni; zbylé 4 vrcholy (001, 010, 101, 110) zůstanou se stupněm 3. Po přidání:

- 4 vrcholy stupně 4 (oba konce každé diagonály),
- 4 vrcholy stupně 3,
- $m = 12 + 2 = 14$.

Rovinnost: krychli nakreslíme rovinně (jedna stěna jako vnější obrys, opačná jako vnitřní čtverec), diagonála ve vnitřní stěně zůstane uvnitř ní, diagonála ve vnější stěně se nakreslí ve vnějším prostoru – diagonály se nekříží mezi sebou ani s hranami Q_3 .

Obecná konstrukce pro sudé $n \geq 4$ (požadovaná v zadání). Vezmeme *hranol* nad C_n : dvě kružnice $a_0a_1 \dots a_{n-1}$ a $b_0b_1 \dots b_{n-1}$ a „příčky“ a_ib_i . Má $2n$ vrcholů, je 3-regulární a rovinný (vnější kružnice a_i , vnitřní b_i , příčky mezi nimi); jeho boční stěny jsou čtyřúhelníky $a_ia_{i+1}b_{i+1}b_i$ (indexy modulo n). Do každé druhé boční stěny, tj. pro $i = 0, 2, 4, \dots, n - 2$, přidáme diagonálu a_ib_{i+1} . Tyto stěny nesdílejí žádný vrchol (stěna i používá indexy i a $i + 1$), takže každý z $2 \cdot \frac{n}{2} = n$ konců diagonál získá stupeň 4 a zbylých n vrcholů má stupeň 3. Každá diagonála vede uvnitř

své stěny, graf zůstává rovinný. Pro $n = 4$ je hranol krychle a dostáváme krychli se dvěma diagonálami v protilehlých stěnách jako výše.

Závěr: graf existuje, právě když n je sudé a $n \geq 4$.

5 Barevnost grafů

Hledáme, kolika „barvami“ (čísla z $[k]$) lze obarvit vrcholy tak, aby žádná hrana nespojila dva vrcholy stejné barvy. Toto číslo $\chi(G)$ je jeden z nejstudovanějších invariantů grafů; pro nás jsou důležité jeho elementární vlastnosti a vztah ke *klikovosti* $\omega(G)$.

Definice – Dobré obarvení, barevnost

Dobré obarvení grafu $G = (V, E)$ pomocí k barev je funkce $c : V \rightarrow [k]$ taková, že pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $c(u) \neq c(v)$. *Barevnost* (chromatické číslo) $\chi(G)$ je nejmenší k , pro které existuje dobré obarvení G pomocí k barev.

 **Video:** *Wrath of Math, Vertex Colorings and the Chromatic Number of Graphs (definice dobrého obarvení a chromatického čísla s příklady).*

 **Intuice.** „Konfliktní“ = sousední; „barva“ = časový slot / místo / kategorie. Barevnost je tedy minimální počet kategorií, do kterých se vrcholy dají rozdělit bez konfliktů. Klasické aplikace: rozvrhování zkoušek (vrchol = předmět, hrana = sdílený student), přidělování frekvencí, alokace registrů kompilátorem.

 **Poznámka.** [Hodnoty barevnosti standardních grafů]

- $\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$ (alespoň jedna hrana, alternujeme 1-2-1-2...); $\chi(P_0) = 1$ (cesta délky 0 = jeden izolovaný vrchol);
- $\chi(C_n) = 2$ pro sudé n , $\chi(C_n) = 3$ pro liché $n \geq 3$;
- $\chi(K_n) = n$ (žádné dva vrcholy nesmí mít stejnou barvu);
- $\chi(G) = 1 \iff G$ nemá hrany; $\chi(G) \leq 2 \iff G$ je bipartitní (resp. bez liché kružnice).

★ Věta – Čtyřbarevná věta – bez důkazu

Každý rovinný graf má $\chi(G) \leq 4$. Tento odhad je těsný (například K_4 je rovinný a má barevnost 4).

 **Poznámka.** Důkaz čtyřbarevné věty (Appel–Haken 1976, Robertson–Sanders–Seymour–Thomas 1997) je velmi technický a počítačově asistovaný; v rámci kurzu se uvádí jen znění. Snazší (a důležitý) je důkaz *pětibarevnosti* pomocí existence vrcholu stupně ≤ 5 : induktivně vrchol odebereme, podgraf obarvíme 5 barvami a vracející se vrchol obarvíme zbylou barvou (případně „prohozením tříd“ přes Kempeho řetězec, pokud je všech 5 sousedů různě obarvených).

5.1 Vztah barevnosti a klikovosti

Definice – Klikovost

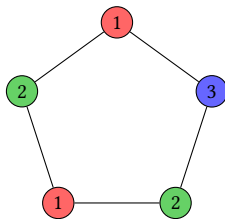
Klikovost $\omega(G)$ je maximální k , pro které G obsahuje K_k jako podgraf.

★ Věta – Dolní odhad barevnosti klikovostí

Pro každý graf G platí

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Důkaz (nepovinný – triviální). Obsahuje-li G podgraf K_k , musí být jeho k vrcholů obarveno navzájem různými barvami, takže $\chi(G) \geq k$. $\square$



C_5 s 3-obarvením (čísla v kroužcích = barvy 1, 2, 3): $\omega(C_5) = 2$, ale $\chi(C_5) = 3$.

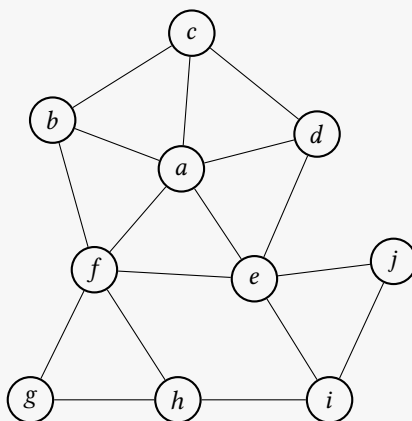
Intuice. Nerovnost $\chi(G) \geq \omega(G)$ je obecně *ostrá*. Klasický příklad: lichá kružnice C_{2k+1} má $\omega = 2$ (žádné tři vrcholy netvoří trojúhelník), ale $\chi = 3$ (sudou kružnici lze obarvit dvěma barvami střídavě, lichou ne). Existují dokonce grafy s libovolně velkým rozdílem $\chi - \omega$ – například Mycielského konstrukce dává grafy bez trojúhelníků ($\omega = 2$) s libovolně velkým χ .

Příklad – SZZ podzim 2024 č. 4: Barevnost konkrétního grafu

(Reálná otázka SZZ: podzim 2024, č. 4 – Barevnost grafu)

Zadání.

- (1) Definujte barevnost grafu.
- (2) Jaká platí omezení pro barevnost rovinných grafů?
- (3) Určete barevnost následujícího grafu.



Graf z otázky (vrcholy $a, \dots, j$); jeho barevnost určíme v bodě (3).

Řešení.

- (1) $\chi(G)$ = nejmenší k , pro které existuje funkce $c : V \rightarrow [k]$ s $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $\{u, v\} \in E$.
- (2) Rovinný graf má $\chi \leq 4$ (čtyřbarevná věta); odhad je těsný (např. K_4).
- (3) Konkrétní graf (10 vrcholů $a, \dots, j$) má $\chi = 4$. *Horní odhad konstruktivně:* vrcholy $a, b, \dots, j$ obarvíme po řadě barvami

4, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 4, 3,

což je dobré obarvení 4 barvami, tedy $\chi \leq 4$ (alternativně rovnou ze čtyřbarevné věty, neboť graf je rovinný). *Dolní odhad:* graf obsahuje 5-cyklos s připojeným univerzálním vrcholem (tj. „kolo“ W_5); W_5 má $\chi = 4$, protože 5-cyklos chce 3 barvy a centrální univerzální vrchol musí mít čtvrtou. Dohromady $\chi = 4$.

6 Hranová a vrcholová souvislost (Mengerova věta)

V této sekci přejdeme od „souvislost ano/ne“ ke kvantitativní otázce *nakolik je graf souvislý*: kolik nejmeně hran (resp. vrcholů) je třeba odebrat, aby se graf rozpadl. *Mengerova věta* pak hluboce propojí tento minimální počet odebíraných objektů s maximálním počtem disjunktních cest mezi dvojicí vrcholů.

Definice – Hranový řez, vrcholový řez

Buď $G = (V, E)$ graf. Množina hran $F \subseteq E$ je *hranový řez*, pokud graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. Pro dva vrcholy u, v je F *hranový u - v řez*, pokud v $(V, E \setminus F)$ neexistuje cesta z u do v .

Množina vrcholů $A \subseteq V \setminus \{u, v\}$ je *vrcholový u - v řez*, pokud v indukovaném podgrafu $G[V \setminus A]$ neexistuje cesta z u do v . Množina $A \subseteq V$ je *vrcholový řez*, je-li $G[V \setminus A]$ nesouvislý (tj. A je vrcholový u - v řez pro nějaké u, v).

Definice – Hranová a vrcholová souvislost

Hranová souvislost grafu G je $k_e(G) = \min\{|F| : F \text{ je hranový řez}\}$. Pro nesouvislý G je $k_e(G) = 0$ (prázdná množina je řez).

Vrcholová souvislost je $k_v(G) = \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez}\}$ pro $G \neq K_n$, a $k_v(K_n) = n - 1$ (úplný graf nemá vrcholový řez ve smyslu definice; konvence). Pro nesouvislý G je $k_v(G) = 0$.

Graf je *t -hranově souvislý*, je-li $k_e(G) \geq t$; analogicky pro *t -vrcholově souvislý*.

 **Poznámka.** Ve vrcholovém u - v řezu nesmí ležet u ani v , jinak by dosažitelnost triviálně přerušilo už odebrání samotného u . Pro úplné grafy K_n definujeme zvlášť, protože v K_n nelze najít vrcholový řez (mezi dvěma vrcholy se vždy najde přímá hrana, kterou žádné odebrání vrcholu neovlivní).

 **Intuice.** $k_e(G)$ = „nakolik tlustý je graf hranově“, $k_v(G)$ = „nakolik tlustý je vrcholově“. Cesta P_n má $k_e = k_v = 1$ (odeber jednu hranu, resp. jeden vnitřní vrchol). Kružnice C_n má $k_e = k_v = 2$. Hyperkrychle Q_d má $k_e = k_v = d$.

★ Věta – Vztah $k_v \leq k_e \leq \delta$

Pro každý graf G s $|V| \geq 2$ platí

$$k_v(G) \leq k_e(G) \leq \delta(G),$$

kde $\delta(G) = \min_v \deg(v)$ je minimální stupeň.

 **Intuice.** Obě nerovnosti dohromady jsou známé jako Whitneyho nerovnost (1932). Druhá ($k_e \leq \delta$) je snadná: odebráním všech δ hran z vrcholu minimálního stupně se vrchol izoluje, je to tedy hranový řez velikosti δ . První ($k_v \leq k_e$) je hlubší. Naivní nápad „za každou hranu minimálního hranového řezu F odeberme jeden její konec“ závisí na volbě konců: v $C_4 = v_1 v_2 v_3 v_4$ s řezem $F = \{v_1 v_2, v_3 v_4\}$ volba $\{v_1, v_3\}$ graf rozdělí, ale volba sousedních $\{v_2, v_3\}$ ne (zbude hrana $v_1 v_4$). Formální důkaz $k_v \leq k_e$ se proto vede indukcí podle počtu hran (Valla–Matoušek, str. 20). Opačná nerovnost obecně neplatí: „motýlek“ (dva trojúhelníky se společným vrcholem) má $k_v = 1$ (odebrání společného vrcholu), ale $k_e = 2$.

6.1 Mengerova věta

Definice — Hranově a vrcholově disjunktní cesty

Dvě cesty z u do v jsou *hranově disjunktní*, pokud nemají žádnou společnou hranu. Jsou *vrcholově disjunktní*, pokud nemají žádný společný vnitřní vrchol (krajní vrcholy u, v samozřejmě sdílí).

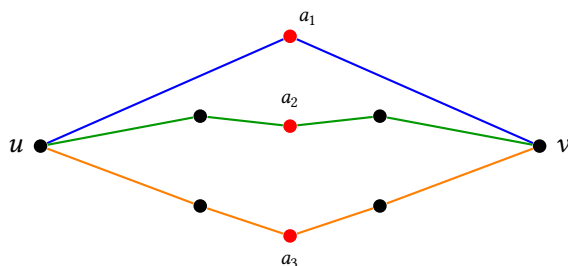
★ Věta — Mengerova věta – hranová verze

Pro každé dva různé vrcholy u, v grafu G platí: maximální počet hranově disjunktních cest z u do v je roven minimální velikosti hranového u - v řezu.

★ Věta — Mengerova věta – vrcholová verze

Pro každé dva různé nesousední vrcholy u, v grafu G platí: maximální počet vrcholově disjunktních cest z u do v je roven minimální velikosti vrcholového u - v řezu.

▶ **Video:** *Wrath of Math*, Intro to Menger's Theorem (obě verze: maximální počet disjunktních cest = minimální řez, hranově i vrcholově).



3 vrcholově disjunktní u - v cesty. Červené vrcholy $\{a_1, a_2, a_3\}$ tvoří vrcholový u - v řez velikosti 3 (po jejich odebrání mezi u a v nevede cesta).

💡 **Intuice.** [Princip důkazu (převod na toky).] Mengerova věta se elegantně dokáže přes *hlavní větu o tocích* (kterou potkáme v další sekci). Idea pro hranovou verzi:

- (1) Z grafu G vytvoříme orientovanou síť G' : každou hranu nahradíme dvěma šipkami v obou směrech, všechny kapacity = 1. Zdroj $z = u$, stok $s = v$.
- (2) Spustíme Ford-Fulkerson; vznikne celočíselný tok f s $w(f) = t$. Po drobné úpravě (zrušení „vzájemně rušících se“ jedniček) má tok hodnoty 0/1 a tvoří t *hranově disjunktních cest* z u do v .
- (3) Hlavní věta o tocích: $\max w(f) = \min c(R)$. Minimální řez v G' pak odpovídá minimálnímu hranovému u - v řezu v G .

Pro vrcholovou verzi: každý vrchol x (kromě u, v) *rozštěpíme* na dva vrcholy x', x'' propojené hranou kapacity 1; vstupní hrany jdou do x' , výstupní z x'' . Toky ≤ 1 skrz $x'x''$ pak modelují omezení „přes vrchol smí projít jen jedna cesta“, a věta o tocích dá vrcholovou verzi.

Příklad — SZZ podzim 2023 č. 3: Souvislost na grafu šestice 0/1

(Reálná otázka SZZ: podzim 2023, č. 3 – Souvislost grafů)

Zadání. G má 64 vrcholů = šestice $\{0, 1\}^6$. Hrany:

- (a) dvojice lišící se *pouze* v 1. souřadnici (perfektní párování velikosti 32);
- (b) dvojice se shodnými prvními 2 znaky (úplné grafy uvnitř každé ze 4 skupin $\{00****, 01****, 10****, 11****\}$ na 16 vrcholech);
- (c) tři konkrétní hrany $\{111010, 101100\}$, $\{101100, 010110\}$, $\{010110, 111011\}$.

Úkoly: (1) vyslovte Mengerovu větu (o vrcholové souvislosti a řezech) včetně potřebných pojmů; (2) určete počet hranově disjunktních cest mezi $u = 000000$ a $v = 111111$; (3) najděte minimální

hranový a vrcholový u - v řez. (Originální PDF SZS podzim 2023 v této otázce nemá náčrt řešení; rozbor níže je vlastní.)

Řešení.

- (1) **Mengerova věta (vrcholová verze).** Pro dva různé *nesousední* vrcholy u, v grafu G je maximální počet vrcholově disjunktních u - v cest roven minimální velikosti vrcholového u - v řezu (vrcholový u - v řez = množina vnitřních vrcholů, po jejímž odebrání nevede z u do v cesta; cesty jsou vrcholově disjunktní, nesdílejí-li žádný vnitřní vrchol). Analogická hranová verze (bez předpokladu nesousednosti) ztotožňuje hranově disjunktní cesty s hranovým řezem – tu využijeme v bodech (2) a (3).
- (2) **Topologický rozbor grafu (klíč k řešení).** Vrcholy se dělí do 4 „skupin“ podle prvních 2 bitů: $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$, každá po 16 vrcholech.
 - **Hrany (a)** jsou perfektní párování přes 1. bit: spojují vrchol 0β s 1β , tedy zachovávají 2. bit. To znamená, že (a)-hrany jdou jen mezi $S_{00} \leftrightarrow S_{10}$ a $S_{01} \leftrightarrow S_{11}$. Mezi dvojicí $\{S_{00}, S_{10}\}$ a $\{S_{01}, S_{11}\}$ žádná hrana (a) nevede.
 - **Hrany (b)** zůstávají uvnitř každé skupiny (úplný graf K_{16}).
 - **Hrany (c)** jsou jediné, které propojují dvojice přes 2. bit:
 - $\{111010, 101100\}$: $S_{11} \leftrightarrow S_{10}$ (přes vrchol $101100 \in S_{10}$);
 - $\{101100, 010110\}$: $S_{10} \leftrightarrow S_{01}$ (přes 101100);
 - $\{010110, 111011\}$: $S_{01} \leftrightarrow S_{11}$ (přes $010110 \in S_{01}$).

Důsledek (úzké hrdlo). Vrchol $u \in S_{00}$. Z dvojice $\{S_{00}, S_{10}\}$ se do dvojice $\{S_{01}, S_{11}\}$ (kde leží v) dá přejít pouze hranou (c), jejíž jeden konec leží v $\{S_{00}, S_{10}\}$. Takových hran jsou jen dvě: $\{101100, 111010\}$ a $\{101100, 010110\}$ – obě procházejí vrcholem 101100 . (Třetí hrana (c) má oba konce v $\{S_{01}, S_{11}\}$ a pro náš přechod neslouží.) Vrchol 101100 je tedy „úzké hrdlo“ mezi u a v .

Min vrcholový řez = 1. Stačí odebrat vrchol $\{101100\}$: po jeho odebrání nezůstane z $\{S_{00}, S_{10}\}$ do $\{S_{01}, S_{11}\}$ žádný most (jediná zbylá hrana (c) je $\{010110, 111011\}$, ale ze S_{00} se do jejího počátečního vrcholu $010110 \in S_{01}$ nedostaneme). Tedy u a v jsou rozpojeni.

Z Mengerovy vrcholové věty plyne: max počet vrcholově disjunktních u - v cest = 1. Příklad jediné takové cesty:

$$000000 \xrightarrow{(a)} 100000 \xrightarrow{(b)} 101100 \xrightarrow{(c)} 111010 \xrightarrow{(b)} 111111.$$

Min hranový řez = 2. Stačí odebrat 2 hrany (c) incidentní s 101100 :

$$R = \{\{101100, 111010\}, \{101100, 010110\}\}.$$

Po jejich odebrání zůstane mezi dvojicemi $\{S_{00}, S_{10}\}$ a $\{S_{01}, S_{11}\}$ pouze hrana (c) $\{010110, 111011\}$, jejíž konec $010110 \in S_{01}$ je ze S_{00} nedosažitelný (žádná hrana (a) ani (b) nevede ze S_{00} do S_{01}). Z Mengerovy hranové věty plyne: max počet hranově disjunktních u - v cest = 2. Konkrétní dvě hranově disjunktní cesty:

$$\begin{aligned} P_1 : & \quad 000000 \xrightarrow{(a)} 100000 \xrightarrow{(b)} 101100 \xrightarrow{(c)} 111010 \xrightarrow{(b)} 111111, \\ P_2 : & \quad 000000 \xrightarrow{(b)} 001100 \xrightarrow{(a)} 101100 \xrightarrow{(c)} 010110 \xrightarrow{(a)} 110110 \xrightarrow{(b)} 111111. \end{aligned}$$

Obě cesty procházejí vrcholem 101100 (vrcholově nejsou disjunktní), ale použité hrany se neopakují. Že nejde rozšířit na 3 hranově disjunktní cesty, plyne z toho, že z vrcholu 101100 vedou jen 2 hrany do $\{S_{01}, S_{11}\}$ (obě hrany (c) – první a druhá), a obě musí být v cestách použity.

Závěry:

- Max hranově disjunktních u - v cest = $\boxed{2}$, min hranový řez = $\boxed{2}$.

- Max vrcholově disjunktních u - v cest = $\boxed{1}$, min vrcholový řez = $\boxed{1}$.

(3) Viz výše – min hranový řez má velikost 2, min vrcholový řez velikost 1.

Poučení. Stupeň $\deg(u) = \deg(v) = 16$ se zdá slibný, ale obecný horní odhad $k \leq \deg$ je v této úloze daleko od reality. Skutečnou souvislost mezi u a v limituje „úzké hrdlo“ (vrchol 101100 a dvě hrany (c), které z něj vedou). Pointou úlohy je rozpoznat tuto topologickou strukturu, ne mechanicky aplikovat stupeň.

7 Orientované grafy, silná a slabá souvislost

Definice – Orientovaný graf

Orientovaný graf (digraf) je dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$ množina (orientovaných) hran. Hrana $(u, v) \in E$ je šipka z u do v , u je její počáteční, v koncový vrchol. Vstupní stupeň $\deg^-(v) = |\{u : (u, v) \in E\}|$, výstupní stupeň $\deg^+(v) = |\{u : (v, u) \in E\}|$.

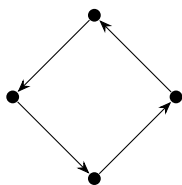
Definice – Podkladový graf, orientovaná cesta

Podkladový graf digrafu G vznikne „zapomenutím orientace“ (každá šipka se převede na neorientovanou hranu, vícenásobné hrany se sloučí). *Orientovaná cesta* z u do v je posloupnost vrcholů $v_0 = u, v_1, \dots, v_k = v$ taková, že $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro každé i a vrcholy se neopakují.

Definice – Slabá a silná souvislost

Digraf G je

- (1) *slabě souvislý*, pokud jeho podkladový (neorientovaný) graf je souvislý;
- (2) *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje orientovaná cesta z u do v (a tedy i z v do u).



Vlevo: silně souvislý digraf (orientovaný cyklus). Vpravo: jen slabě souvislý – z w_1 vede orientovaná cesta do všech ostatních, ale z w_0 ani w_3 se zpět do w_1 nedostaneme.

Intuice. Silná souvislost je striktně silnější vlastnost než slabá: každý silně souvislý digraf je slabě souvislý (orientované cesty dají neorientované), ale opačně to neplatí. Příklad: „cesta po jednosměrkách“ $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ je slabě souvislá, ale ne silně (z v_2 se zpět do v_0 nedostaneme).

Poznámka. [Komponenty silné souvislosti] Vrcholy lze rozdělit na třídy podle relace „ u, v jsou v jedné silně souvislé komponentě“ (u je orientovaně dosažitelný z v a naopak). Tato relace je ekvivalence; její třídy jsou *komponenty silné souvislosti*. Kontrakce každé komponenty do jednoho vrcholu dává tzv. *kondenzaci* digrafu, která je vždy *acyklická* (DAG); tu používá řada algoritmů (např. Kosaraju nebo Tarjan), v požadavcích jsou ale jen samotné pojmy slabé/silné souvislosti.

Příklad – Rozhodnutí silné vs. slabé souvislosti

Zadání. Rozhodněte pro digrafy

- H_1 s vrcholy $\{a, b, c\}$ a šípkami $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$,

- H_2 s vrcholy $\{a, b, c\}$ a šípkami $\{(a, b), (b, c)\}$,
zda jsou silně souvislé, slabě souvislé, nebo ani jedno.

Řešení.

- (1) H_1 : orientovaná kružnice. Z a vede orientovaná cesta do b, c (přes hrany); z b do c, a ; z c do a, b .
Silně souvislý (a tedy automaticky i slabě).
- (2) H_2 : orientovaná cesta. Z a vede cesta do b a c , ale z c neexistuje orientovaná cesta zpět do a (žádná šipka nevede od c). *Není silně souvislý*. Podkladový graf je neorientovaná cesta $a-b-c$ (3 vrcholy, 2 hrany), která je souvislá, takže H_2 je *slabě souvislý*.

Komponenty silné souvislosti H_2 : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ (každý vrchol sám). Kondenzace = řetězec $\{a\} \rightarrow \{b\} \rightarrow \{c\}$
– acyklický DAG.

8 Toky v sítích (Ford-Fulkerson)

Síť je orientovaný graf s vyznačeným zdrojem z a stokem s a s *kapacitami* na hranách. Tok udává, kolik proteče každou hranou, a to tak, aby platil Kirchhoffův zákon (přítok = odtok ve všech vrcholech kromě z, s) a žádná hrana se nepřetížila. Hlavní výsledek je věta $\text{max-flow} = \text{min-cut}$; Ford-Fulkersonův algoritmus ji navíc převádí na konstrukci.

8.1 Síť, tok, řez

Definice – Síť

Síť je čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z, s \in V$ jsou dva různé vrcholy (*zdroj* a *stok*) a $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je *kapacita* (každá hrana je ohodnocena nezáporným reálným číslem).

Definice – Tok

Tok v síti (G, z, s, c) je funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ splňující:

- (1) *Kapacitní omezení*. Pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq f(e) \leq c(e)$.
- (2) *Kirchhoffův zákon*. Pro každý vrchol $u \in V \setminus \{z, s\}$ platí

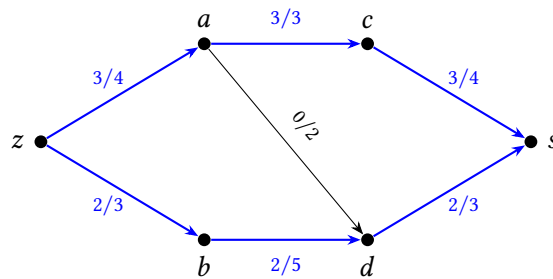
$$\sum_{(x,u) \in E} f(x, u) = \sum_{(u,y) \in E} f(u, y).$$

Velikost (hodnota) toku f je

$$w(f) = \sum_{(z,x) \in E} f(z, x) - \sum_{(x,z) \in E} f(x, z),$$

tj. čistý odtok ze zdroje. Lze ekvivalentně počítat čistý přítok do stoku (plyne z Kirchhoffova zákona).

 **Intuice.** Síť si představme jako soustavu jednosměrných vodovodních trubek: $c(e)$ je maximální průtok trubkou, $f(e)$ skutečný okamžitý průtok. Trubkou nesmí téct víc, než kolik je její kapacita, a v každém uzlu (kromě zdroje a stoku) musí přitéct stejně, kolik odeče („není to děravé“). Velikost toku je „množství vody, co odejde ze zdroje“ = „co přiteče do stoku“.



Síť s tokem velikosti $w(f) = 3 + 2 = 5$. Hrany označené f/c (tok / kapacita); modré hrany nesou nenulový tok. Ve vrcholech a, b, c, d platí Kirchhoffův zákon (přítok = odtok).

Definice – Řez sítě

Řez mezi z a s v síti (G, z, s, c) je množina hran $R \subseteq E$ taková, že v upravené síti (G', z, s, c) s $G' = (V, E \setminus R)$ neexistuje orientovaná cesta ze z do s . Kapacita řezu je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$. Pro každé rozdělení $V = A \sqcup B$ s $z \in A, s \in B$ je *elementární řez* $S(A, B) = \{(x, y) \in E : x \in A, y \in B\}$ tvořen hranami vedoucími z A do B .

Poznámka. Každý řez obsahuje elementární řez: vezmeme A = vrcholy dosažitelné ze z v $(V, E \setminus R)$, pak $S(A, V \setminus A) \subseteq R$. Protože kapacity jsou nezáporné, má tento elementární řez kapacitu nejvýše $c(R)$; minimální kapacitu řezu tedy vždy realizuje nějaký elementární řez. Řezů je konečně mnoho (jsou to podmnožiny E), takže minimum v hlavní větě existuje.

★ Věta – Hlavní věta o tocích / max-flow = min-cut

V každé síti je velikost *maximálního* toku rovna kapacitě *minimálního* řezu:

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Intuice. [Princip důkazu] Nerovnost $\max w(f) \leq \min c(R)$ je *snadná*: pro libovolný tok f a libovolný (elementární) řez $S(A, B)$ platí

$$w(f) = f(A, B) - f(B, A) \leq f(A, B) \leq c(A, B) = c(R),$$

protože $f(B, A) \geq 0$ a $f(e) \leq c(e)$ na každé hraně. Tedy maximální tok je nejvýše roven minimálnímu řezu.

Rovnost (obtížnější část) se dokazuje konstrukcí: vezmeme tok *bez zlepšující cesty* (existuje díky existenci max. toku); pro něj sestojíme řez R stejné kapacity rozdělením vrcholů na ty, do kterých vede ze zdroje zlepšující cesta, a zbytek. Detaily v sekci Ford-Fulkerson níže.

★ Věta – Existence maximálního toku – bez důkazu

V každé síti (G, z, s, c) existuje maximální tok, tedy tok f^* s $w(f^*) \geq w(f)$ pro každý tok f .

Poznámka. Tvrzení není zcela triviální: toků je nekonečně mnoho a jejich velikosti jsou obecná reálná čísla (interval typu $(0, 1)$ na reálné ose nemá maximum). Důkaz se vede přes kompaktnost množiny všech toků v $\mathbb{R}^{|E|}$ a spojitost funkce w , takže w na kompaktu nabývá maxima. Pro *racionální* (zvláště celočíselné) kapacity je důkaz jednodušší – vyplývá z konečnosti Ford-Fulkersonova algoritmu (viz dále). Požadavky M4 výslovně uvádějí, že tuto větu uvádíme *bez důkazu*.

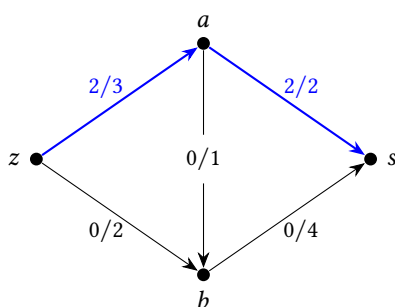
8.2 Ford-Fulkersonův algoritmus

Princip: dokud existuje cesta ze zdroje do stoku v tzv. *rezervní síti* (vznikne ze sítě tak, že každé hraně e s tokem $f(e)$ přiřadíme *rezervu* $c(e) - f(e)$ vpřed a $f(e)$ *zpět*), pošli po této cestě co nejvíc dodatečného toku, tj. minimum rezerv na cestě (tím se aspoň jedna rezerva vynuluje).

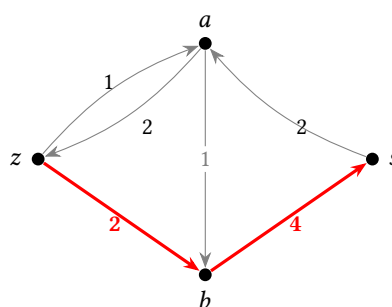
Definice – Rezervní (residuální) síť, zlepšující cesta

Pro tok f definujeme *rezervní síť* G_f : na každé hraně $e = (u, v) \in E$ s $f(e) < c(e)$ uvažujeme *rezervu vpřed* $c(e) - f(e) > 0$; pokud $f(e) > 0$, uvažujeme i *rezervu vzad* (zpětnou hranu (v, u) s kapacitou $f(e)$). *Zlepšující cesta* je orientovaná cesta ze z do s v G_f s každou rezervou > 0 . Hodnota *zlepšení* je $\varepsilon = \min(\text{rezervy na cestě})$.

 **Video:** WilliamFiset, Max Flow Ford-Fulkerson (hledání maximálního toku Fordovým–Fulkersonovým algoritmem přes rezervní síť a zlepšující cesty).



(a) Síť s tokem f , $w(f) = 2$



(b) Rezervní síť G_f se zlepšující cestou

(a) Hrany označené f/c (tok / kapacita); **modré** hrany nesou nenulový tok ($f(z, a) = 2$, $f(a, s) = 2$), černé jsou prázdné. Tok splňuje Kirchhoffův zákon ve všech vnitřních vrcholech.

(b) Šedé šipky jsou *nenasyčené rezervy* – vpřed s kapacitou $c(e) - f(e)$ (např. $z \rightarrow a$ má rezervu $3 - 2 = 1$), vzad (zpětné) s kapacitou $f(e)$ (např. $a \rightarrow z$ má rezervu 2 pro „vrácení“ části toku). **Červeně** je vyznačená *zlepšující cesta* $z \rightarrow b \rightarrow s$ se zlepšením $\varepsilon = \min(2, 4) = 2$. Nový tok dostaneme posláním 2 jednotek po této cestě, $w(f)$ vzroste z 2 na 4.

 **Intuice.** Klíčová myšlenka: zpětné hrany v rezervní síti umožňují *zrušit část dříve poslaného toku*, pokud se ukáže, že byl rozvržen „nejlépe“. Bez zpětných hran by algoritmus mohl uvíznout v lokálně optimálním, ale globálně suboptimálním toku.

★ Věta – Ford-Fulkersonův algoritmus

- (1) Začni s tokem $f \equiv 0$.
- (2) Najdi v rezervní síti G_f nějakou zlepšující cestu P se zlepšením $\varepsilon_P > 0$. Pokud žádná neexistuje, vrať f jako maximální tok.
- (3) Aktualizuj f podél P : hrany ve směru cesty zvětši o ε_P , hrany proti směru (zpětné) zmenši o ε_P . Vrať se k bodu 2.

★ Věta – Korektnost a konečnost FF pro celočíselné kapacity

Pro síť s celočíselnými kapacitami Ford-Fulkersonův algoritmus skončí v konečném počtu kroků a vrátí maximální tok. Vracený tok je celočíselný.

Intuice. „Konečnost“: každá zlepšující cesta zvedne $w(f)$ aspoň o 1 (rezervy jsou celá nezáporná čísla, takže minimum je ≥ 1). Velikost toku je omezená kapacitou libovolného řezu, tedy konečnou hodnotou. „Korektnost“: pokud neexistuje zlepšující cesta, vezmeme $A = \{v : v \in G_f \text{ vede ze } z \text{ do } v \text{ cesta s kladnými rezervami}\}$ a sestrojíme řez $S(A, V \setminus A)$. Na hranách z A do $V \setminus A$ je $f(e) = c(e)$ (nasycené), na hranách zpět $f(e) = 0$, takže $w(f) = c(S(A, V \setminus A))$ – tok je roven kapacitě řezu, a podle slabší části věty je proto maximální (a tento řez je minimální).

Poznámka. Pro *iracionální* kapacity FF nemusí konvergovat (existují příklady, kdy běží do nekonečna a tok konverguje k hodnotě *menší* než maximum). Pro *racionální* kapacity konečnost plyne přenásobením jmenovatelem na celočíselný případ. Modernější varianty FF (Edmonds-Karp, která hledá nejkratší zlepšující cestu BFS) běží v polynomiálním čase $O(VE^2)$ a fungují i pro reálné kapacity.

Příklad – FF na malé síti

Zadání. V síti s vrcholy z, a, b, s a hranami $(z, a) : 2, (z, b) : 1, (a, b) : 1, (a, s) : 1, (b, s) : 2$ (kapacity) najděte maximální tok.

Řešení.

- (1) Start $f \equiv 0$. Zlepšující cesta $z \rightarrow a \rightarrow s$ s $\varepsilon = 1$. Aktualizace: $f(z, a) = 1, f(a, s) = 1, w(f) = 1$.
- (2) Rezervní síť: hrana (z, a) rezerva 1 vpřed; (z, b) rezerva 1; (b, s) rezerva 2. Zlepšující cesta $z \rightarrow b \rightarrow s$ s $\varepsilon = 1$. Aktualizace: $f(z, b) = 1, f(b, s) = 1, w(f) = 2$.
- (3) Rezervní síť: hrana (z, a) stále rezerva 1; (a, b) rezerva 1; (b, s) rezerva 1. Zlepšující cesta $z \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow s$ s $\varepsilon = 1$. Aktualizace: $f(z, a) = 2, f(a, b) = 1, f(b, s) = 2, w(f) = 3$.
- (4) Rezervní síť už nemá z - s cestu (hrana (z, a) nasycena, (z, b) nasycena). *Maximální tok* je $w(f) = 3$.

Ověření přes minimální řez: rozdělení $A = \{z\}, B = \{a, b, s\}$ dává $S(A, B) = \{(z, a), (z, b)\}$ s $c(S) = 2 + 1 = 3$. Hodnota toku = kapacita řezu.

8.3 Shrnutí toků

Pro *aplikace* (např. Mengerova věta, párování v bipartitních grafech, problém maximálního přiřazení) si zapamatujeme tento postup: úlohu převedeme na hledání maximálního toku ve vhodně zkonstruované síti, spustíme Ford–Fulkerson a celočíselnost vrátí kombinatorické řešení (disjunktní cesty / párování / přiřazení).

Shrnutí

Poznámka. Klíčové vlastnosti a vzorce (přehled k SZZ). Stručný výčet klíčových definic, vět a vzorců okruhu M4. Zkratky: $n = |V|$, $m = |E|$, c = počet komponent, $\delta(G)$ = minimální stupeň.

Základní pojmy a rodiny grafů.

- Graf $G = (V, E)$; stupeň $\deg(v)$ = počet hran incidentních s v . **Princip sudosti:** $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$ (každá hrana přispívá do dvou stupňů); zvláště: počet vrcholů lichého stupně je vždy sudý.
- Izomorfismus $G \cong H$: bijekce $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ zachovávající hrany. Invarianty: n, m , skóre (posloupnost stupňů), počet trojúhelníků.
- Doplněk $\bar{G}$: stejné vrcholy, doplňkové hrany. Bipartitní graf: $V = A \cup B, E \subseteq A \times B$ – obarvitelný 2 barvami $\iff$ neobsahuje lichou kružnici.
- K_n : $\binom{n}{2}$ hran, $(n-1)$ -regulární; $K_{m,n}$: mn hran; cesta P_n délky n : $n+1$ vrcholů, n hran; kružnice C_n : $n \geq 3$.

Souvislost, vzdálenost, eulerovský tah.

- Komponenta = maximální souvislý podgraf; vzdálenost $\text{dist}(u, v)$ = délka nejkratší cesty (metrika:

trojúhelníková nerovnost, $\text{dist}(u, v) = 0 \iff u = v$).

- **Eulerovský graf:** G (bez izolovaných vrcholů) má uzavřený eulerovský tah $\iff G$ je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň. (Eulerovský tah projde každou hranou právě jednou; vrcholy se opakovat smí.)

Stromy.

- Strom = souvislý acyklický graf; list = vrchol stupně 1; les = acyklický graf (komponenty jsou stromy).
- **5 ekvivalentních charakteristik stromu:** (1) souvislý a acyklický; (2) mezi každými dvěma vrcholy právě jedna cesta; (3) souvislý, odebrání libovolné hrany poruší souvislost; (4) acyklický, přidání libovolné hrany vytvoří kružnici; (5) souvislý a $m = n - 1$.
- Každý strom s $n \geq 2$ vrcholy má alespoň 2 listy. Strom na n vrcholech má přesně $n - 1$ hran; les o n vrcholech a k komponentách má $n - k$ hran.

Rovinné grafy (Eulerova formule).

- Rovinný graf = existuje nakreslení v rovině bez křížení. Stěny = komponenty doplnku nakreslení; vnější stěna je právě jedna (neomezená).
- **Eulerova formule:** pro souvislý rovinný graf $n - m + s = 2$; pro c komponent $n - m + s = 1 + c$.
- **Horní mez na hrany** (z EF dvojím počítáním hranic stěn: $3s \leq 2m$): $m \leq 3n - 6$ (pro $n \geq 3$); pro graf bez trojúhelníků (každá stěna ≥ 4 hrany): $m \leq 2n - 4$ (pro $n \geq 3$; aplikuje se na každou komponentu s ≥ 3 vrcholy).
- 2-souvislý rovinný vnitřně triangulovaný (vnitřní stěny = C_3 , vnější = C_k): $m = 3n - 3 - k$, tedy $2n - 3 \leq m \leq 3n - 6$.
- **Důsledky:** každý rovinný graf má vrchol stupně ≤ 5 ; K_5 ($m = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6$) a $K_{3,3}$ ($m = 9 > 8 = 2 \cdot 6 - 4$) nejsou rovinné. Kuratowského věta (bez důkazu): G je rovinný $\iff$ neobsahuje podgraf, který je dělením K_5 nebo $K_{3,3}$.

Barevnost grafů.

- Dobré obarvení $c : V \rightarrow [k] : c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $\{u, v\}$. Barevnost $\chi(G) = \min$ takové k ; klikovost $\omega(G) = \text{velikost největší kliky}$.
- $\chi(G) \geq \omega(G)$ (v klice K_k nutno k barev). Nerovnost obecně ostrá: C_5 má $\omega = 2$, $\chi = 3$.
- $\chi = 1 \iff$ žádné hrany; $\chi \leq 2 \iff$ bipartitní; $\chi(C_n) = 2$ (sudé n), $\chi(C_n) = 3$ (liché n); $\chi(K_n) = n$.
- **Čtyřbarevná věta** (bez důkazu): rovinný $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$; odhad těsný (K_4 rovinný). Pětibarevnost rovinných: snáze, přes existenci vrcholu stupně ≤ 5 + Kempeho řetězce.

Hranová a vrcholová souvislost (Mengerova věta).

- Hranová souvislost $k_e(G) = \min$ hranový řez; vrcholová $k_v(G) = \min$ vrcholový řez ($k_v(K_n) = n - 1$ konvencí). Vždy $k_v(G) \leq k_e(G) \leq \delta(G)$.
- **Mengerova věta – hranová verze:** pro libovolné dva různé vrcholy u, v : max počet hranově disjunktních $u-v$ cest = min hranový $u-v$ řez.
- **Mengerova věta – vrcholová verze:** pro dva různé *nesousední* vrcholy u, v : max počet vrcholově disjunktních $u-v$ cest = min vrcholový $u-v$ řez. (Vrcholový řez $A \subseteq V \setminus \{u, v\}$; vrcholově disjunktní = bez společného *vnitřního* vrcholu.)
- Princip důkazu: převod na toky (každou hranu kapacity 1; vrcholová verze: rozštěpit každý vnitřní vrchol x na x', x'' s hranou kapacity 1).

Orientované grafy.

- Orientovaný graf: hrany jsou uspořádané dvojice (u, v) ; vstupní/výstupní stupeň. **Slabá souvislost:** podkladový neorientovaný graf je souvislý. **Silná souvislost:** $\forall u, v$ existuje orientovaná cesta $u \rightarrow v$ i $v \rightarrow u$. Silné komponenty = maximální silně souvislé podgrafy.

Toky v sítích (Ford–Fulkerson).

- Síť (G, z, s, c) : orientovaný graf, zdroj z , stok s , kapacity $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Tok f : kapacitní omezení $f(e) \leq c(e)$ a Kirchhoffův zákon $\sum_{\text{in}} f = \sum_{\text{out}} f$ v každém $v \neq z, s$. Hodnota toku $w(f) = \text{čistý odtok ze } z$.

- Řez R : množina hran, po jejímž odebrání nevede cesta ze z do s ; kapacita $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.
- **Hlavní věta (max-flow = min-cut):** $\max_f w(f) = \min_R c(R)$. Existence maximálního toku *bez důkazu*.
- **Ford–Fulkerson:** augmentující cesta v rezervní síti (rezerva vpřed $c(e) - f(e)$, zpětná hrana (v, u) s kapacitou $f(e)$); zvýšit tok o min kapacitu. Pro celočíselné kapacity terminuje pseudo-polynomiálně ($O(w^* \cdot m)$, kde w^* je velikost maximálního toku); Edmonds–Karp (BFS) dává $O(n \cdot m^2)$.

Zdroje

- T. Sláma: *Diskrétní matematika*, zápisky z přednášky NDMI002 (přednášející M. Mareš), MFF UK, 2019/20 (primární zdroj výkladu základních pojmů, stromů, rovinných grafů, barevnosti a orientovaných grafů).
<https://slama.dev/poznamky/diskretni-matematika/>
- T. Valla, J. Matoušek: *Kombinatorika a grafy I*, skripta, MFF UK, 2008 (kap. 2 toky v sítích a Fordův–Fulkersonův algoritmus, kap. 3 míra souvislosti a Mengerova věta).
<https://iuuk.mff.cuni.cz/~valla/kg.html>
- J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum; anglicky *Invitation to Discrete Mathematics*, 2. vydání, Oxford University Press, 2008 (učebnice k oběma předmětům; stromy, rovinné grafy, barevnost, souvislost a toky).
- Video odkazovaná v textu: Reducible, *Introduction to Graph Theory: A Computer Science Perspective*; Wrath of Math, *What are Planar Graphs?*, *Vertex Colorings and the Chromatic Number of Graphs* a *Intro to Menger's Theorem*; 3Blue1Brown, *Euler's Formula and Graph Duality*; WilliamFiset, *Max Flow Ford Fulkerson* (YouTube, odkazy u příslušných témat).
- MFF UK: požadavky ke státní závěrečné zkoušce (Informatika, Bc.) a zadání otázek z minulých termínů.
<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>