

Příklady otázek – Logika

Reálné otázky ze SZZ 2023–2026 (M6)

Jakub Klesa

Pokryté předměty: NAIL062 (Výroková a predikátová logika)

Obsah

1 Model teorie

1

Poznámka. Tento dokument obsahuje reálné otázky z minulých termínů SZZ (2023–2026) zařazené do okruhu M6. U otázek s obrázkem je grafika oříznutá z originálního PDF (viz odkaz na zdroj). Text, číselná data a tabulky jsou přepsané věrně. Zadání i oficiální náčrty řešení pocházejí ze sad zveřejněných na webu MFF UK:

<https://www.mff.cuni.cz/cs/studenti/bakalarske-studium/statni-zaverecne-zkousky/bakalarske-statni-zkousky-studijniho-programu-informatika>

Náčrty označené jako doplněné jsou vlastní, oficiální sada je k dané otázce neobsahuje. Vlastní doplnění k oficiálním náčrtům jsou uvedena v odděleném bloku *Doplňující vysvětlení*.

1 Model teorie

(Reálná otázka: léto 2024, č. 4 – Model teorie)

Zadání.

1. Nechť T je teorie jazyka (signatury) $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ v predikátové logice (kde $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ jsou množiny relačních a funkčních symbolů s danými aritami). Uveďte definice pojmů *struktura jazyka L* a *model teorie T* .
2. Vyjádřete následující tvrzení formulemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle Z, S, P \rangle$ predikátové logiky (s unárními predikáty pro ‘složit zkoušku’, ‘mít štěstí’, ‘být připraven’).
 - (a) *Ne každý, kdo složí zkoušku, má štěstí, ale kdo má štěstí, zkoušku složí.*
 - (b) *Štěstí přeje připraveným. (Kdo je připraven, má štěstí.)*
 - (c) *Nějaký student byl připraven, ale zkoušku nesložil.*
3. Pro teorii $T_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, a také pro teorii $T_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, buď najděte nějaký její model anebo formálně dokažte (pomocí tablo metody, rezoluce, či Hilbertovského kalkulu), že žádný model nemá.

Náčrt řešení.

1. Struktura jazyka L je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde A je neprázdná množina (doména) a $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ jsou soubory realizací relačních a funkčních symbolů jazyka L . Realizací n -árního relačního symbolu R je nějaká n -ární relace $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$, realizací n -árního funkčního symbolu

f je nějaká n -ární funkce $f^A: A^n \rightarrow A$, přičemž jako realizaci konstantního symbolu c (jako nulárního funkčního symbolu) bereme přímo nějaký prvek $c^A \in A$.

Pozn: Lze uznat i odpověď ve smyslu, že struktura je nějaká k -tice, kde kromě neprázdné domény jsou i příslušné realizace relačních a funkčních symbolů s vysvětlením, co ty realizace jsou.

Model teorie T je struktura jazyka L , ve které platí všechny axiomy teorie T .

2. Například

$$(a) \varphi_1 : \neg(\forall x)(Z(x) \rightarrow S(x)) \wedge (\forall y)(S(y) \rightarrow Z(y))$$

$$(b) \varphi_2 : (\forall z)(P(z) \rightarrow S(z))$$

$$(c) \varphi_3 : (\exists s)(P(s) \wedge \neg Z(s))$$

3. Teorie T_1 má například jednoprvkový model $\mathcal{A} = \langle \{0\}, Z^{\mathcal{A}} = \{0\}, S^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{A}} = \emptyset \rangle$. Teorie T_2 model nemá, což se dokáže důkazem sporu z T_2 pomocí tablo metody či Hilbertovským kalkulem, nebo zamítnutím skolemizované teorie T_2 převedené do CNF pomocí rezoluce.

Doplňující vysvětlení (nad rámec oficiálního náčrtu):

Proč je $\mathcal{A}$ modelem T_1 . Jediný prvek 0 zkoušku složil, ale štěstí nemá, takže $(\forall x)(Z(x) \rightarrow S(x))$ neplatí a první konjunkt φ_1 platí. Implikace $S(x) \rightarrow Z(x)$ i $P(x) \rightarrow S(x)$ platí, protože $S^{\mathcal{A}}$ i $P^{\mathcal{A}}$ jsou prázdné (předpoklad je vždy nepravdivý).

Proč T_2 model nemá (neformálně). Podle φ_3 existuje a s $P(a)$ a $\neg Z(a)$. Z φ_2 plyne $S(a)$ a z druhé části φ_1 pak $Z(a)$, spor.

Formální důkaz rezolucí. Skolemizace φ_3 nahradí existenčně kvantifikovanou proměnnou novou konstantou a , první část φ_1 (po převodu $\neg(\forall x)(\dots)$ na $(\exists x)(Z(x) \wedge \neg S(x))$) novou konstantou b . Po převodu do CNF a přejmenování proměnných dostaneme množinu klauzulí

$$\{Z(b)\}, \{\neg S(b)\}, \{\neg S(y), Z(y)\}, \{\neg P(z), S(z)\}, \{P(a)\}, \{\neg Z(a)\}.$$

Zamítnutí (u každého kroku unifikace): $\{P(a)\}$ a $\{\neg P(z), S(z)\}$ dají přes $\{z/a\}$ klauzuli $\{S(a)\}$; $\{S(a)\}$ a $\{\neg S(y), Z(y)\}$ dají přes $\{y/a\}$ klauzuli $\{Z(a)\}$; $\{Z(a)\}$ a $\{\neg Z(a)\}$ dají prázdnou klauzuli $\square$. Skolemizovaná teorie je tedy nesplnitelná, a protože je s T_2 ekvisplnitelná, nemá model ani T_2 . Klauzule z první části φ_1 (s konstantou b) k zamítnutí potřeba nejsou.

Totéž tablo metodou. Tablo z teorie T_2 s kořenem $F\perp$: položka $T\varphi_3$ dá svědka $TP(a)$, $FZ(a)$; položky „všichni“ z φ_2 a z druhé části φ_1 instancujeme termem a . Rozvoj $T(P(a) \rightarrow S(a))$ větví na $FP(a)$ (spor s $TP(a)$) a $TS(a)$; rozvoj $T(S(a) \rightarrow Z(a))$ na $FS(a)$ (spor s $TS(a)$) a $TZ(a)$ (spor s $FZ(a)$). Všechny větve jsou sporné, tedy $T_2 \vdash \perp$ a T_2 je sporná.